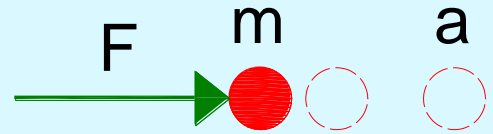
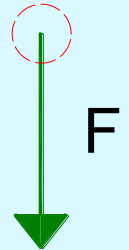
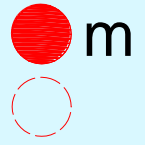


**IL CAMPO
GRAVITAZIONALE
TERRESTRE E
IL GEOIDE**

Secondo principio della dinamica:

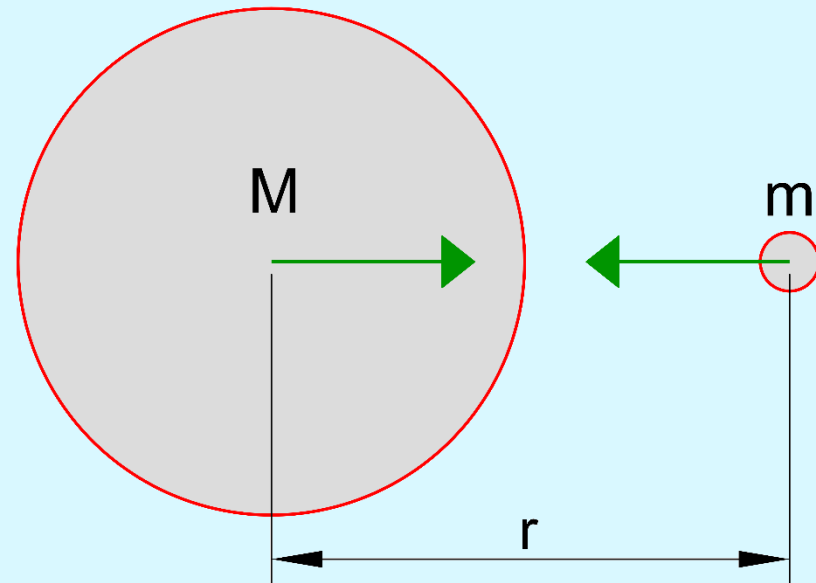


$$F = m a \rightarrow F = m g$$

Legge di gravitazione universale:

$$F = G \frac{mM}{r^2}$$

$$G = 6.67 \cdot 10^{-11} \text{Nm}^2 / \text{kg}^2$$



Ponendo l'uguaglianza e semplificando:

$$\cancel{m}g = G \frac{\cancel{m}M}{r^2} \quad \rightarrow \quad g = \frac{GM}{r^2}$$

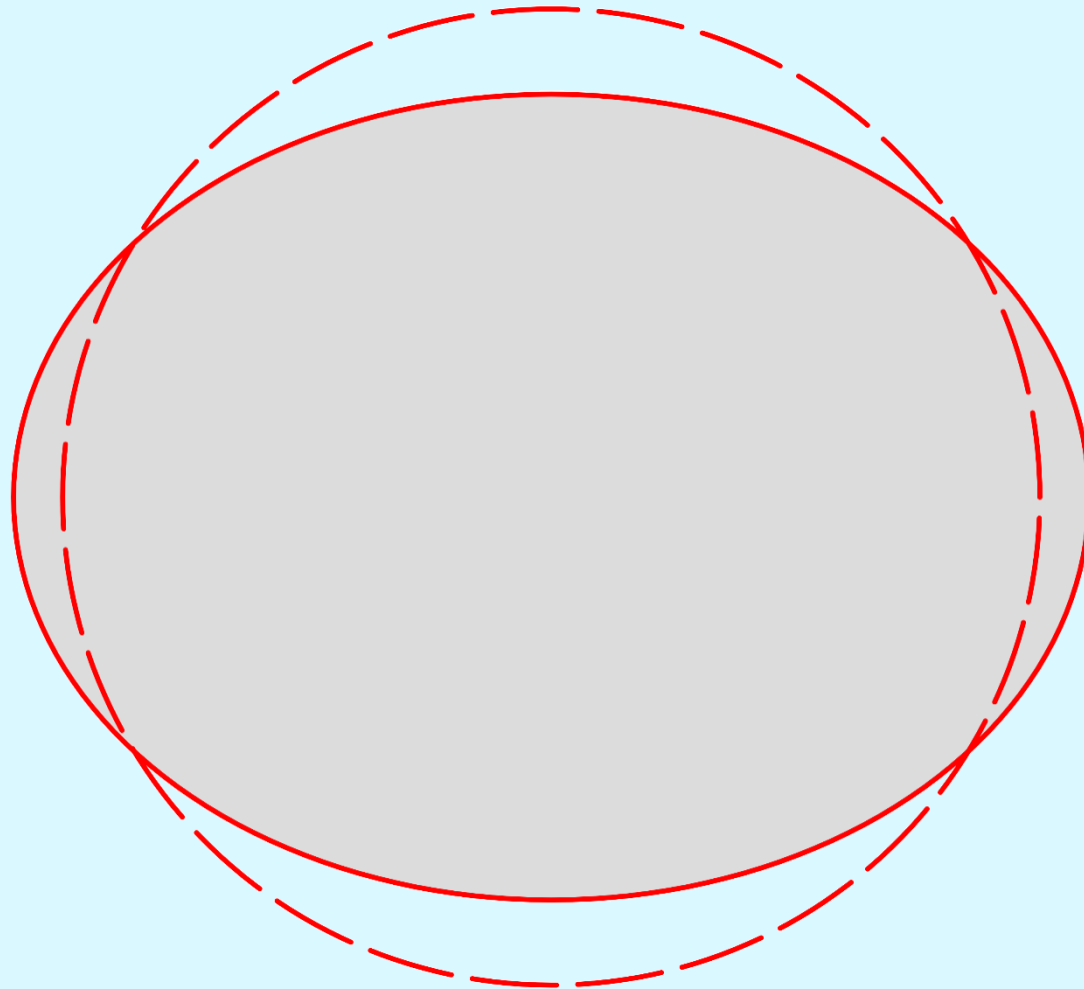
L'accelerazione di gravità è pari al gradiente del potenziale:

$$g = -\nabla V \quad \rightarrow \quad V = -\frac{GM}{r}$$

Contributo dovuto allo “schiacciamento”:

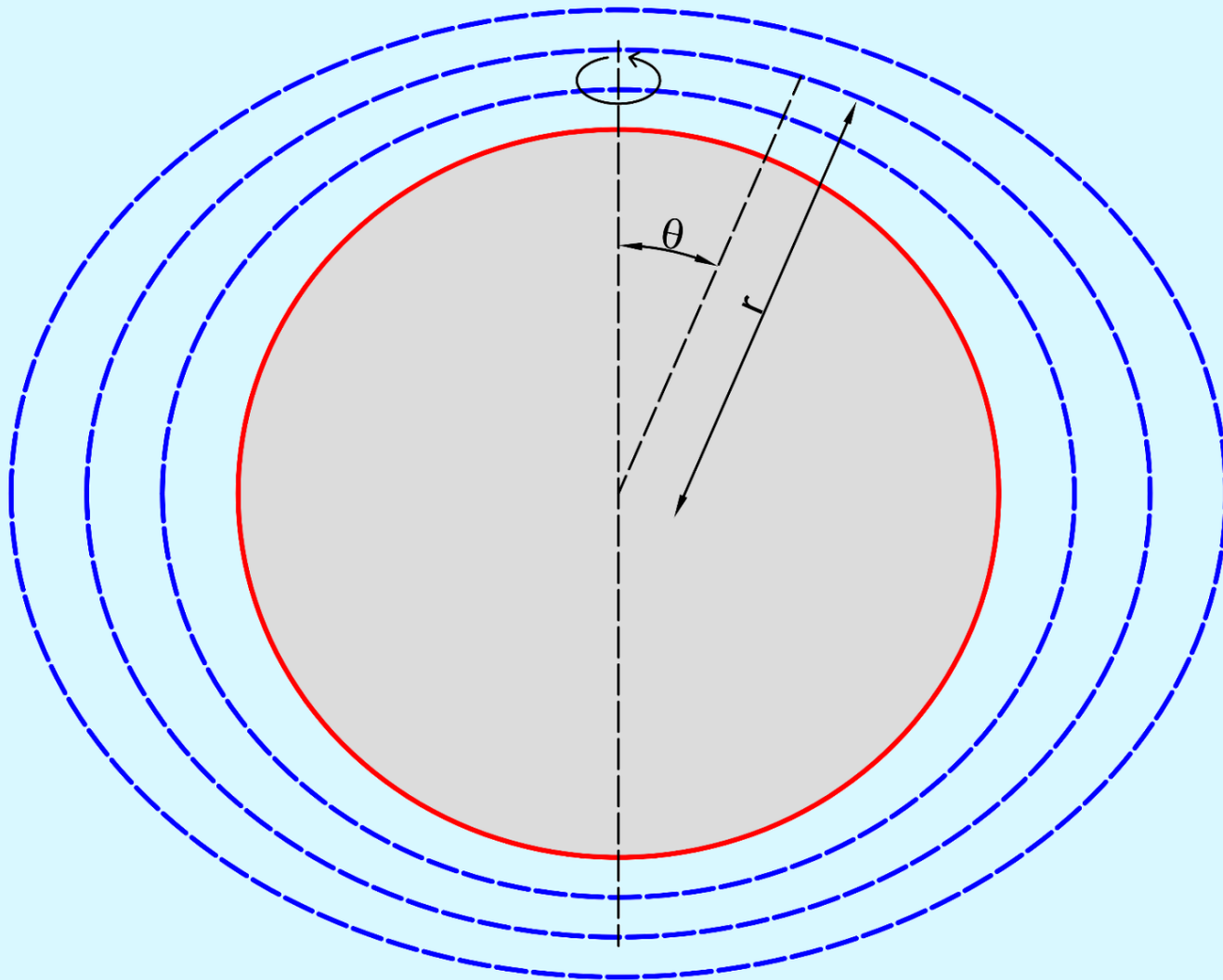
$$V = -\frac{GM}{r} + \frac{GMR^2}{2r^3} J_2 (3 \cos^2 \theta - 1)$$

$\theta =$ colatitudine



Contributo dovuto alla forza centrifuga:

$$V = -\frac{GM}{r} + \frac{GMR^2}{2r^3} J_2 (3 \cos^2 \theta - 1) - \frac{1}{2} \omega^2 r^2 \sin^2 \theta$$



Una superficie equipotenziale è tale per cui V è **COSTANTE** per qualsiasi valore di θ , pertanto dovrà essere il raggio a variare per garantire la costanza del potenziale. Il raggio che verifica tale condizione è quello di un **ELLISSOIDE**.

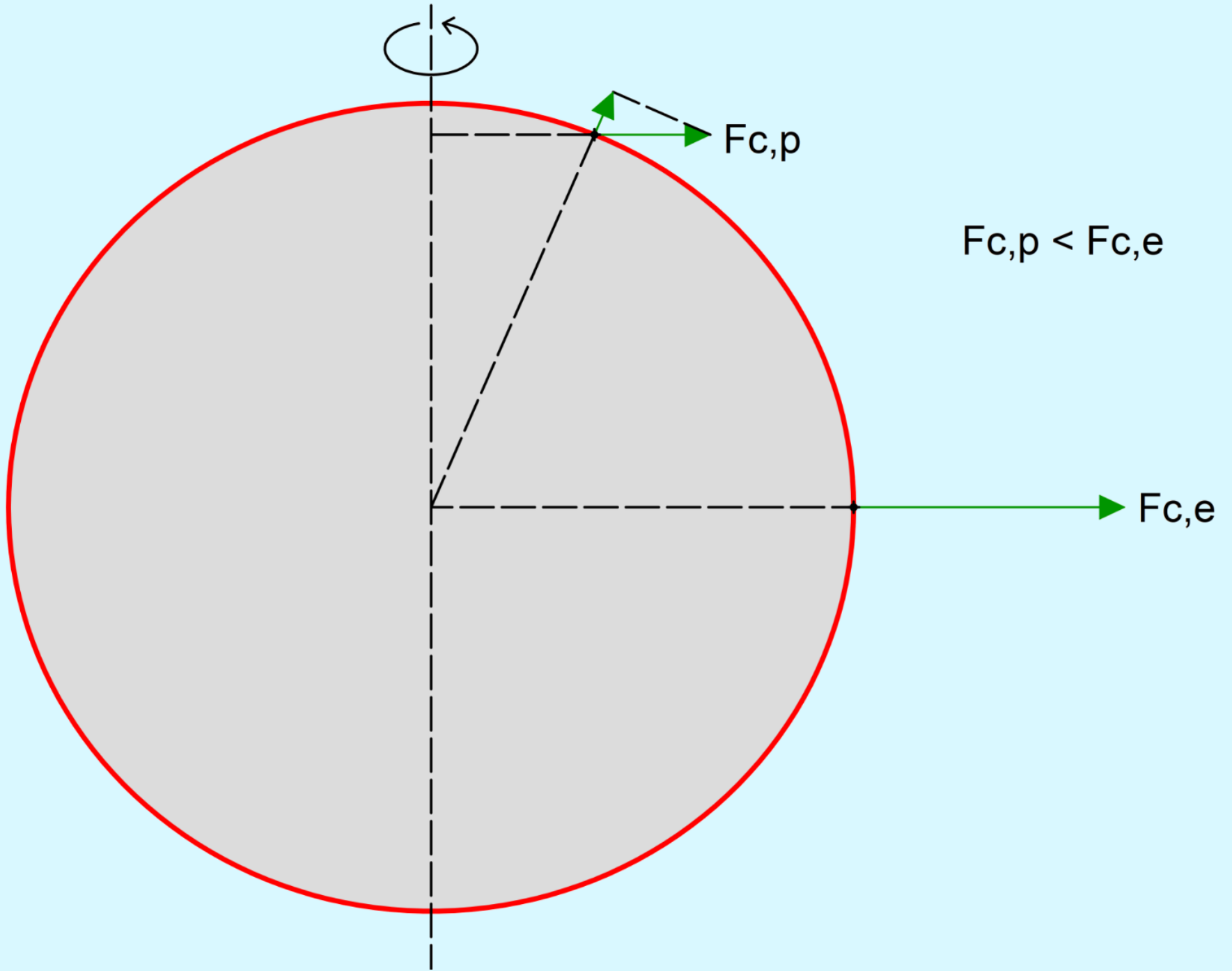
Derivando il potenziale rispetto al raggio:

$$V = -\frac{GM}{r} + \frac{GMR^2}{2r^3} J_2 (3 \cos^2 \theta - 1) - \frac{1}{2} \omega^2 r^2 \sin^2 \theta$$



$$g \cong \frac{\partial V}{\partial r} = \frac{GM}{r^2} - \frac{3GM R^2}{2r^4} J_2 (3 \sin^2 \phi - 1) - \omega^2 r \cos^2 \phi$$

$\phi =$ latitudine



ELLIPSOIDE DI RIFERIMENTO WGS84

$$a = 6378137.0 \text{ m}$$

semiasse maggiore

$$1/f = 298.257223563$$

$$f = (a - c) / a$$

schacciamento

$$c = 6356752.3 \text{ m}$$

semiasse minore

$$\omega = 7292115 \cdot 10^{-11} \text{ rad/s}$$

velocità angolare media (in 24 ore compie un po' più di un giro)

ACCELERAZIONE DI GRAVITA' DI RIFERIMENTO SULL'ELLISSOIDE

$$r = a (1 - f \operatorname{sen}^2 \phi)$$

$$\phi = 0 \quad \rightarrow \quad r = a$$

$$\phi = \pm \pi / 2 \quad \rightarrow \quad r = c$$

$$g_0(\phi) = g_{0e} (1 + \alpha \operatorname{sen}^2 \phi + \beta \operatorname{sen}^4 \phi)$$

$$\phi = 0 \quad \rightarrow \quad \text{accelerazione di gravità all'equatore.}$$

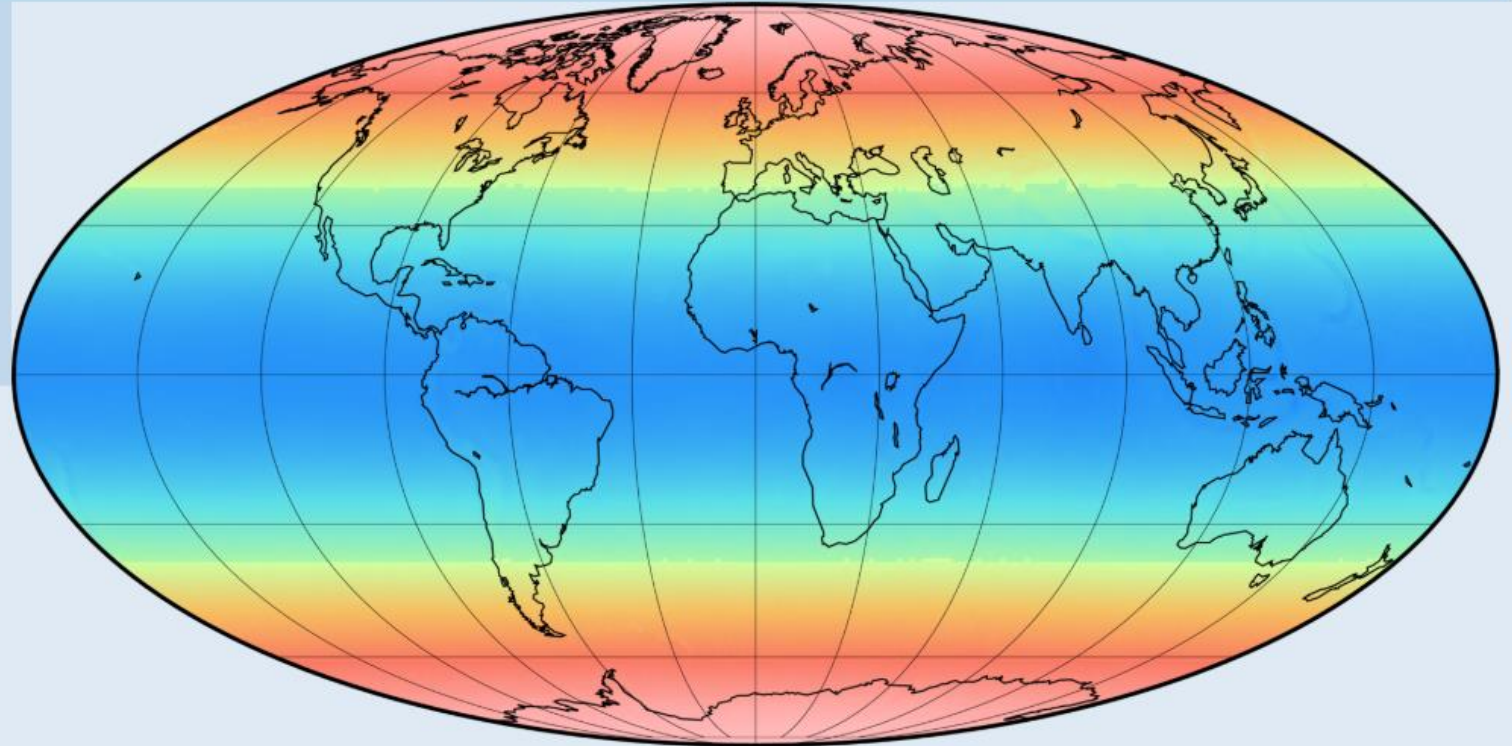
$$\phi = \pm \pi / 2 \quad \rightarrow \quad \text{accelerazione di gravità ai poli (maggiore di quella all'equatore).}$$

Done.

100%

Functional: gravity_ell
Model: EGM96
Calculation Start: 2019-05-28T09:18:09.510Z
Calculation End: 2019-05-28T09:18:23.974Z
Calculation Time: 1s
Grid: Longitude: -180° .. 180°
Latitude: -90° .. 90°
Grid step: 1°, 65341 Grid points
Reference system: WGS84

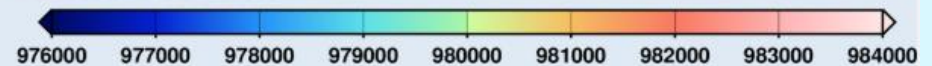
Illumination
[Download Grid](#)
[Download ePS](#)



EGM96

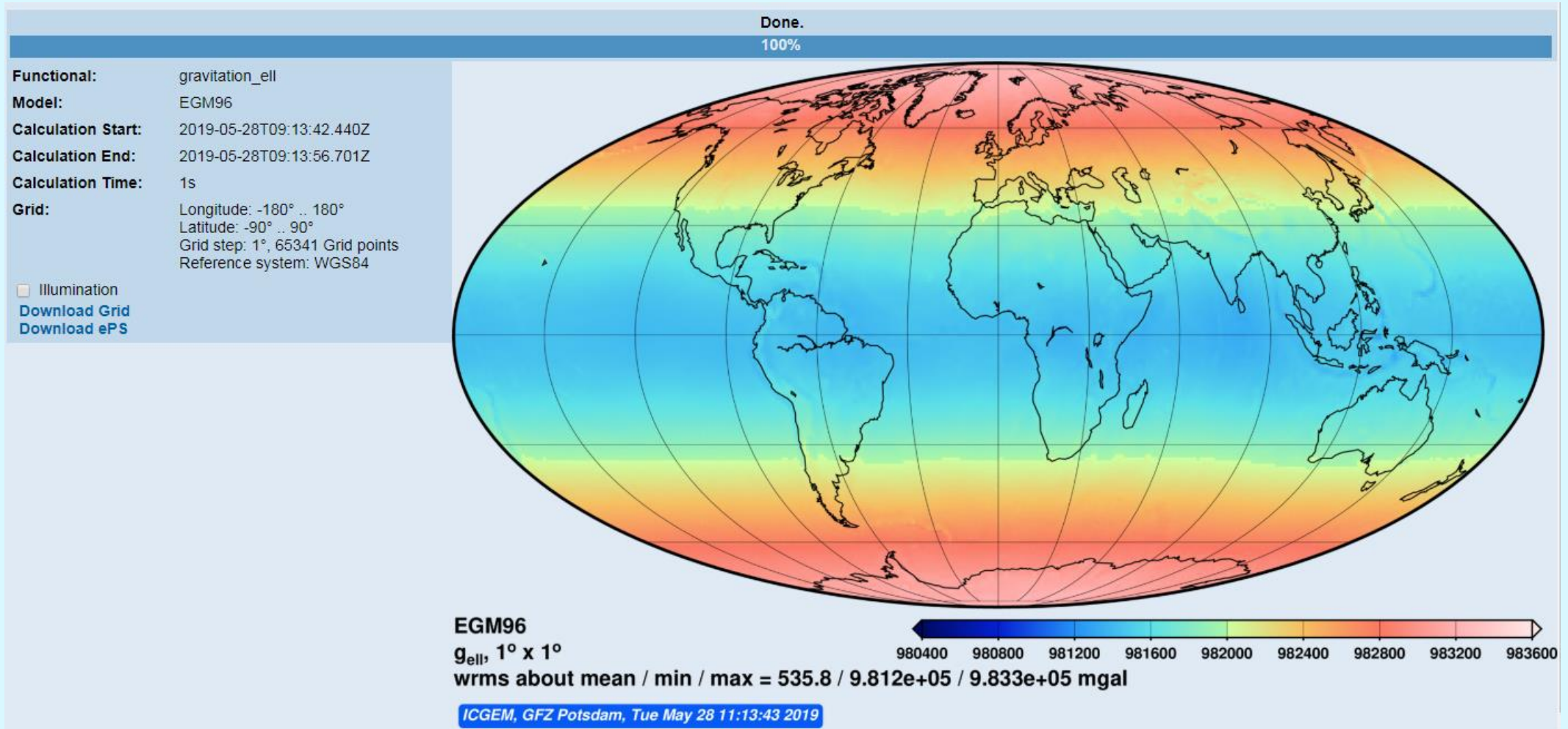
g_{ell} , 1° x 1°

wrms about mean / min / max = 1545 / 9.778e+05 / 9.833e+05 mgal



ICGEM, GFZ Potsdam, Tue May 28 11:18:10 2019

Accelerazione di gravità considerando il potenziale centrifugo.
Una persona che pesa 80 kg ai poli pesa 79.5 kg all'equatore.



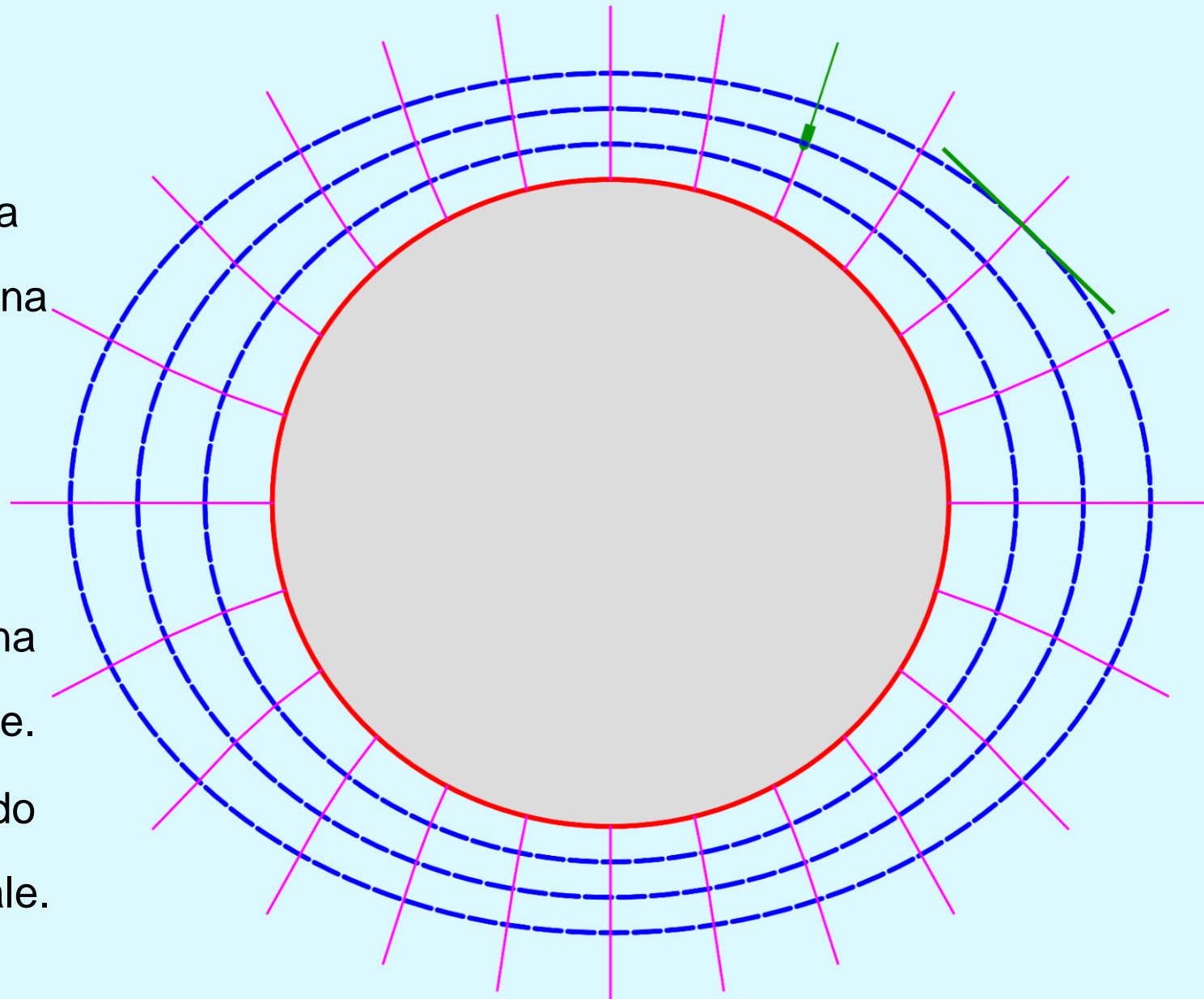
Accelerazione di gravità NON considerando il potenziale centrifugo
(contributo della sola forma).

CARATTERISTICHE DELLE SUPERFICI EQUIPOTENZIALI E DELLE LINEE DI FORZA

- Sono perpendicolari tra di loro.
- Il vettore “accelerazione di gravità” è perpendicolare alle superfici equipotenziali (quindi parallelo alle linee di forza), ma la sua intensità non è costante lungo la superficie (il potenziale è costante).
- Non si intersecano tra loro perché uno stesso punto non può avere due potenziali diversi.
- Nell’ipotesi che la densità della Terra sia uniforme, le superfici equipotenziali assumono la forma di un ellissoide. Tali superfici non sono parallele tra loro; infatti sono più vicine ai poli dove la gravità è maggiore a causa della minor forza centrifuga e per via del minor raggio.

RISCONTRI FISICI

- La verticale è materializzata dal filo a piombo che assume una direzione tangente ad una linea di forza.
- Un piano orizzontale identificato dalla bolla sferica è tangente ad una superficie equipotenziale.
- La superficie di un liquido in quiete è equipotenziale.



DEFINIZIONE DI GEOIDE E SUA FORMULAZIONE MATEMATICA

Si definisce GEOIDE la superficie equipotenziale passante per il livello medio dei mari idealmente prolungata sotto la terraferma.

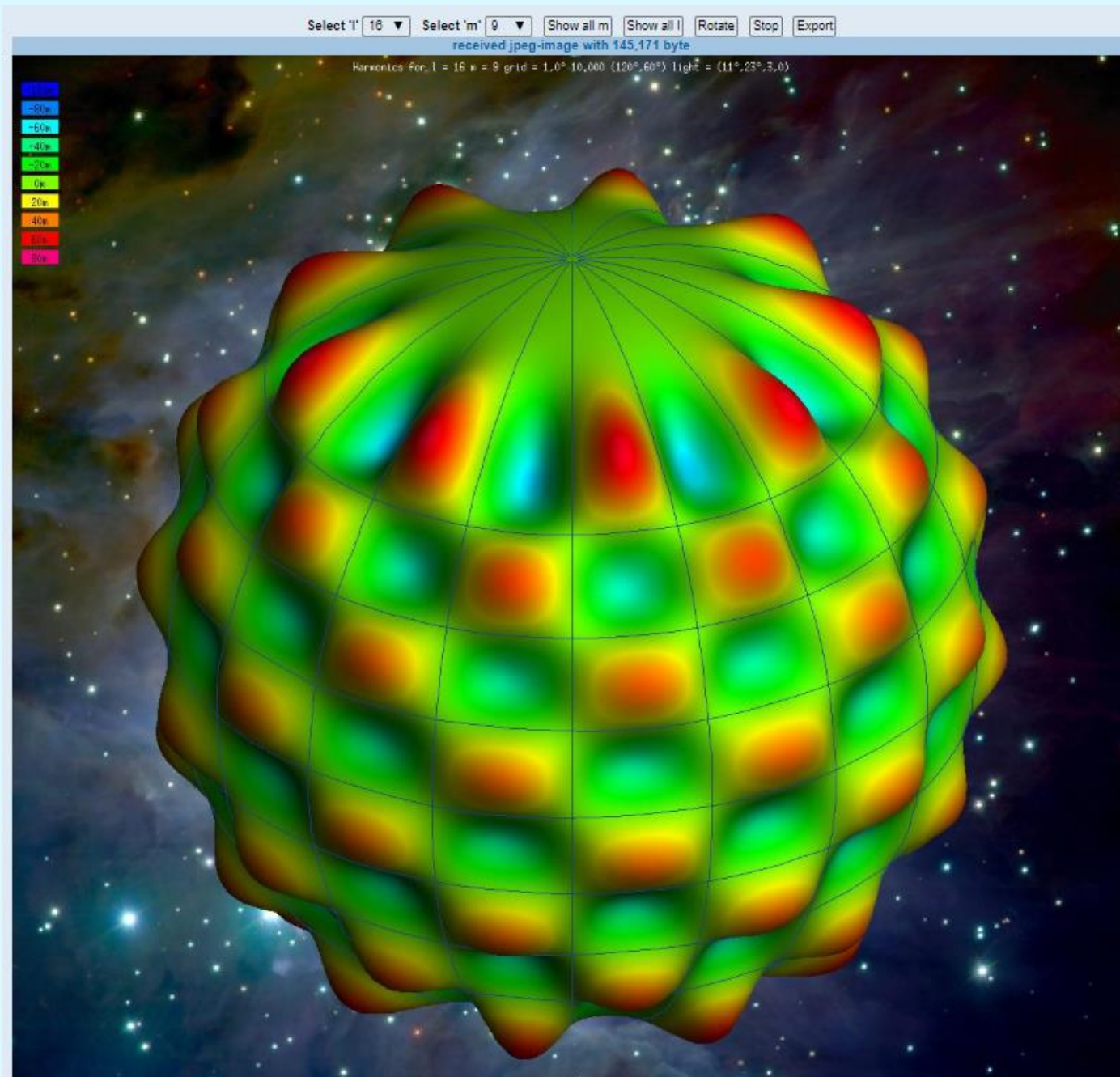
- Modelli GLOBALI calcolati per tutta la Terra: EGM96.
- Modelli LOCALI calcolati per aree di limitata estensione: ITALGEO2005.

MODELLI GLOBALI

- Se densità uniforme: ELLISSOIDE passante per il livello medio dei mari.
- Sviluppo in serie di ARMONICHE SFERICHE:

$$W_a(r, \lambda, \varphi) = \frac{GM}{R} \sum_{\ell=0}^{\ell_{\max}} \sum_{m=0}^{\ell} \left(\frac{R}{r}\right)^{\ell+1} P_{\ell m}(\sin \varphi) (C_{\ell m}^W \cos m\lambda + S_{\ell m}^W \sin m\lambda)$$

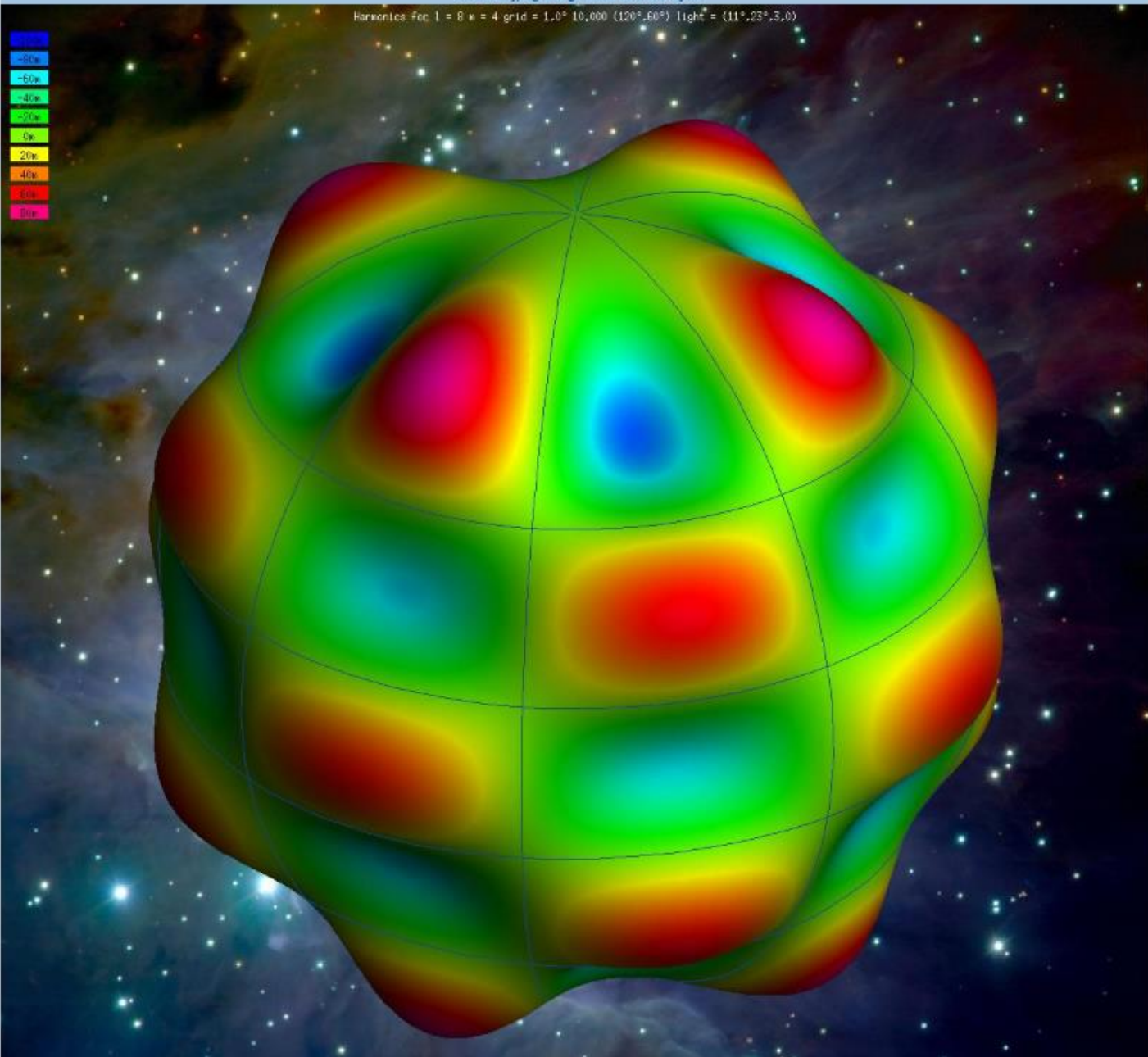
International Centre for Global Earth Models (ICGEM)



Select 'l' 8 Select 'm' 4 Show all m Show all l Rotate Stop Export

received jpeg-image with 120,150 byte

Harmonics: $l = 8$ $m = 4$ grid = 1.0° 10,000 (120°, 60°) light = (11°, 23°, 3, 0)

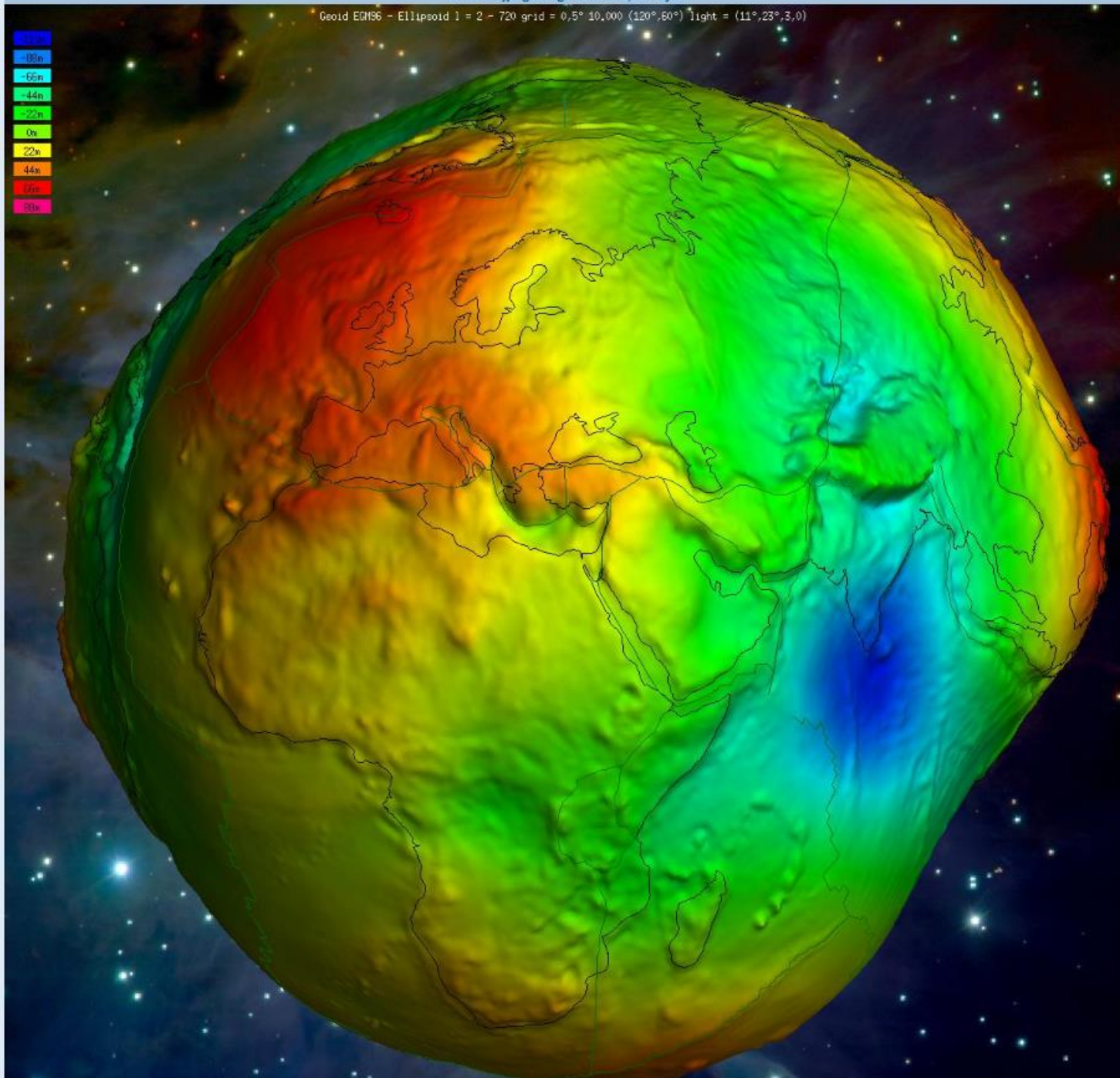


- Considerando l'orografia e la densità delle masse attraverso modelli topografici (ETOPO1) si ottengono modelli di geoidi più accurati (EGM96):

$$H(\lambda, \varphi) = R \sum_{\ell=0}^{\ell_{\max}} \sum_{m=0}^{\ell} P_{\ell m}(\sin \varphi) (C_{\ell m}^{\text{topo}} \cos m\lambda + S_{\ell m}^{\text{topo}} \sin m\lambda)$$

received jpeg-image with 173,387 byte

Geoid EGM96 - Ellipsoid 1 = 2 - 720 grid = 0,5° 10,000 (120°,60°) light = (11°,23°,3,0)



Calculation of Gravity Field Functionals on Ellipsoidal Grids

Model selection

Longtime Model	AIUB-CHAMP01S
Model from Series	AIUB-CHAMP03S
Topography related Model	AIUB-GRACE01S
Celestial Object Model	AIUB-GRACE02S
Topography	AIUB-GRACE03S
	DEOS_CHAMP-01C
	DGM-1S
	EGM2008
	EGM96
	EGM96s
	EIGEN-1
	EIGEN-1s
	EIGEN-2
	EIGEN-51C

Functional selection

height_anomaly
height_anomaly_ell
geoid
gravity_disturbance
gravity_disturbance_sa
gravity_anomaly
gravity_anomaly_cl
gravity_anomaly_sa
gravity_anomaly_bg

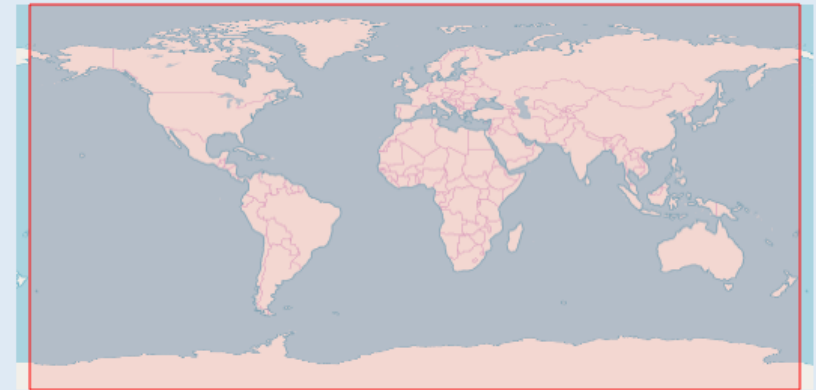
The Geoid is one particular equipotential surface of the gravity potential of the Earth. Among all equipotential surfaces, geoid is the surface which is equal to the undisturbed sea surface and its continuation below the continents.

Here it will be approximated by the height anomaly plus a topography dependent correction term (eqs. 71 and 117 of STR09/02). Topography information used here is taken from the ETOPO1.

Low-pass filtering by (gently) truncating the model [\(more details\)](#)

Start Gentle Cut: Maximum Degree :

Grid selection



Grid Step [°]:

Height over Ellipsoid [m]:

Reference System:

Radius: Flat:

Gm: Omega:

Tide System: Zero Degree Term

Gaussian Filter [\(more details\)](#)

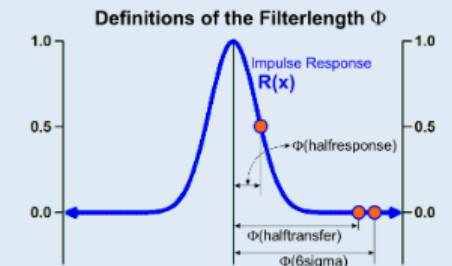
None

Half response

Half transfer

6 Sigma

Filter Length: ° [Degree]

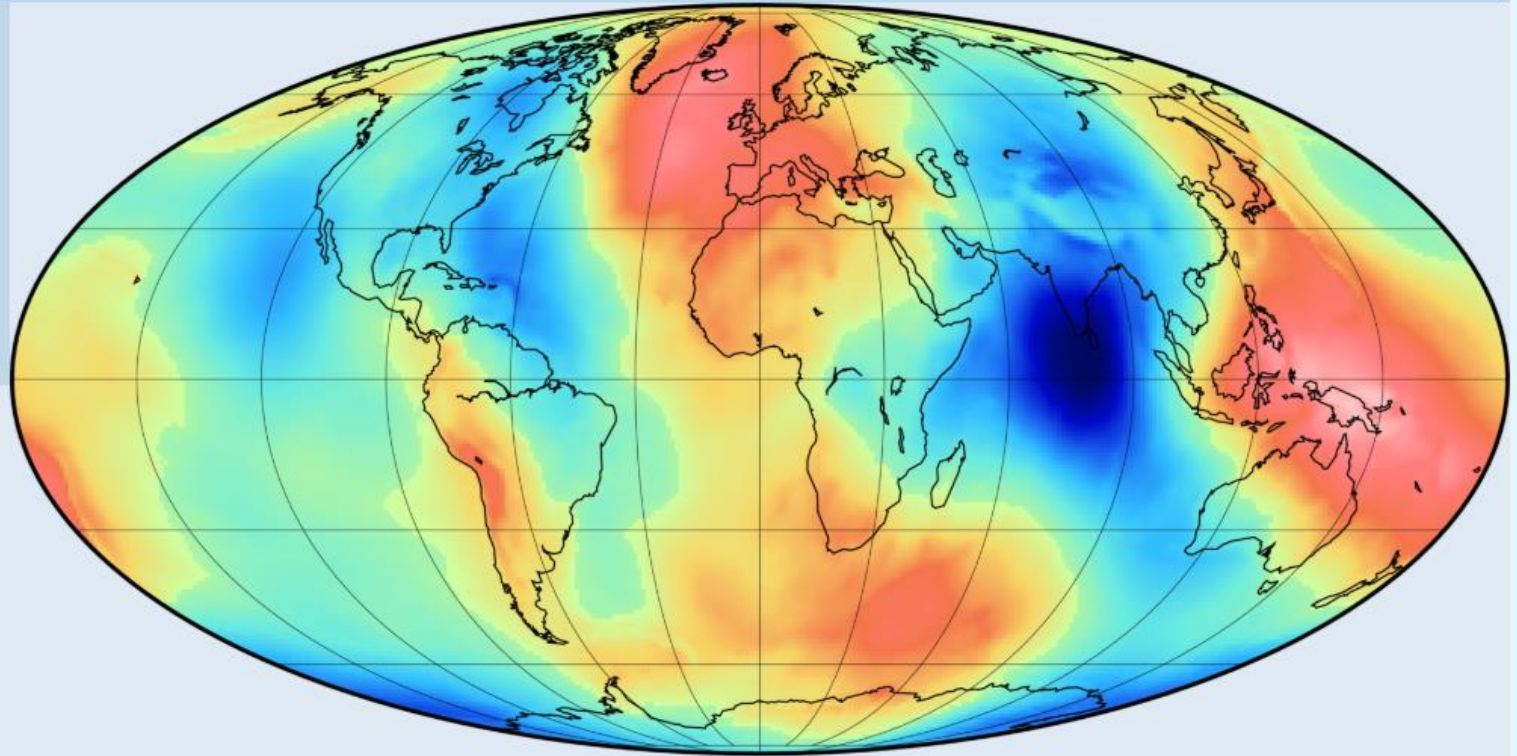


Done.

100%

Functional: geoid
Model: EGM96
Calculation Start: 2019-05-27T20:18:39.606Z
Calculation End: 2019-05-27T20:18:55.790Z
Calculation Time: 4s
Grid: Longitude: -180° .. 180°
Latitude: -90° .. 90°
Grid step: 1°, 65341 Grid points
Reference system: WGS84

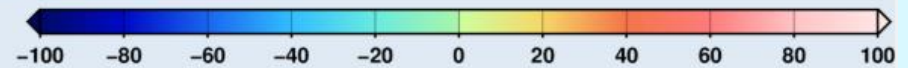
- Illumination
- [Download Grid](#)
- [Download ePS](#)



EGM96

N, 1° x 1°

wrms about mean / min / max = 30.58 / -106.1 / 84.73 meter



ICGEM, GFZ Potsdam, Mon May 27 22:18:43 2019

Model selection

- Longtime Model
- Model from Series
- Topography related Model
- Celestial Object Model
- Topography

etopo1-2250

Functional selection

- topography_shm
- topography_grd

This is not a functional of the gravity field. Some functionals are calculated on the Earth's surface:

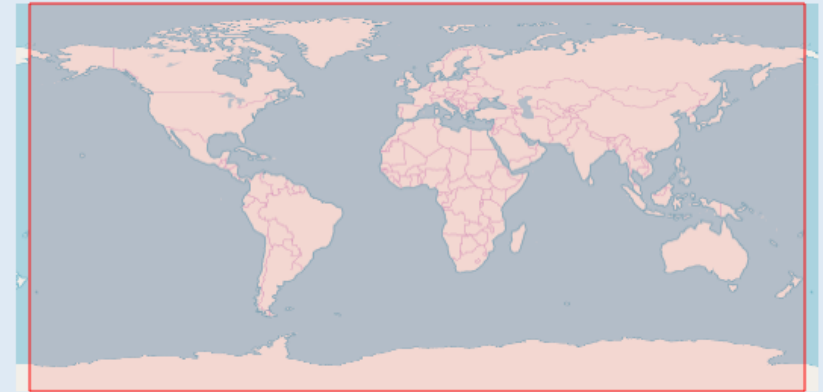
- height_anomaly
- gravity_disturbance
- gravity_anomaly
- gravity_earth

During this calculation, to calculate the exact coordinates, the topography of the Earth is calculated by bi-linear interpolation of the (1' x 1') - grid of **ETOPO1**. Here we offer the possibility to calculate this topography separately. The values are calculated, as the model itself, with respect to the geoid.

Low-pass filtering by (gently) truncating the model [\(more details\)](#)

Start Gentle Cut: Maximum Degree :

Grid selection



Grid Step [°]:
Height over Ellipsoid [m]:

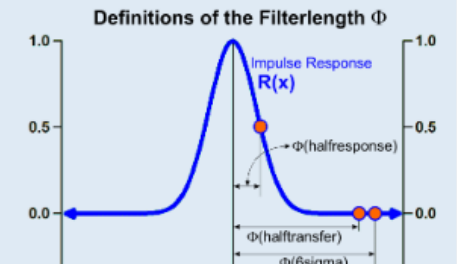
Reference System:
Radius: Flat:
Gm: Omega:

Tide System: Zero Degree Term

Gaussian Filter [\(more details\)](#)

- None
- Half response
- Half transfer
- 6 Sigma

Filter Length: ° [Degree]

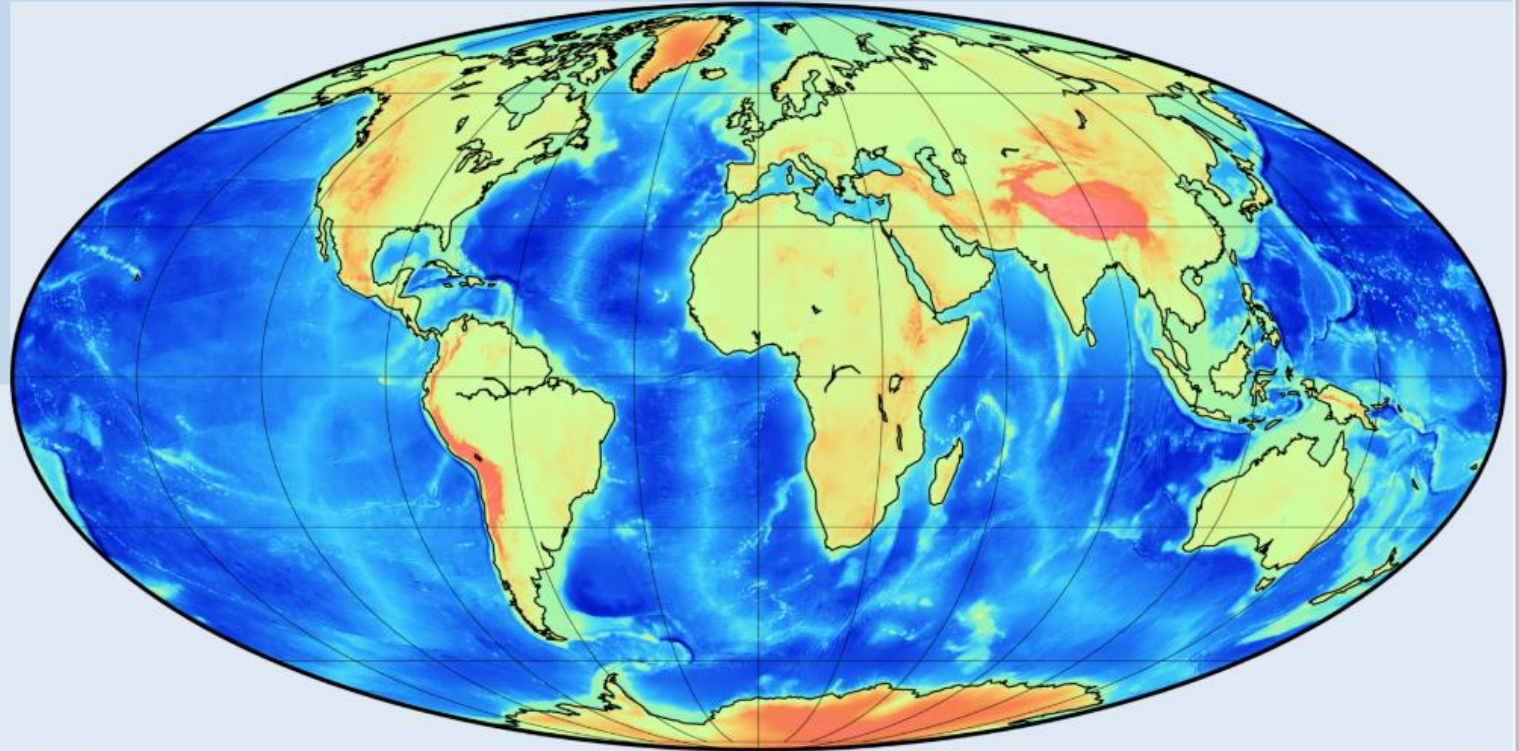


Done.

100%

Functional: topography_grd
Model: etopo1-2250
Calculation Start: 2019-05-28T14:32:51.696Z
Calculation End: 2019-05-28T14:34:04.664Z
Calculation Time: 16s
Grid: Longitude: -180° .. 180°
Latitude: -90° .. 90°
Grid step: 0.1°, 6485401 Grid points
Reference system: WGS84

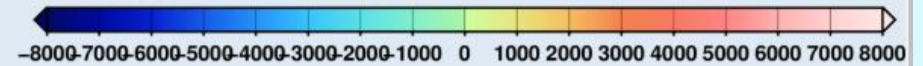
Illumination
[Download Grid](#)
[Download ePS](#)



etopo1-2250

$H_{\text{TOPOgrd}}, 0.1^\circ \times 0.1^\circ$

wrms about mean / min / max = 2508 / $-1.071\text{e}+04$ / 8266 meter



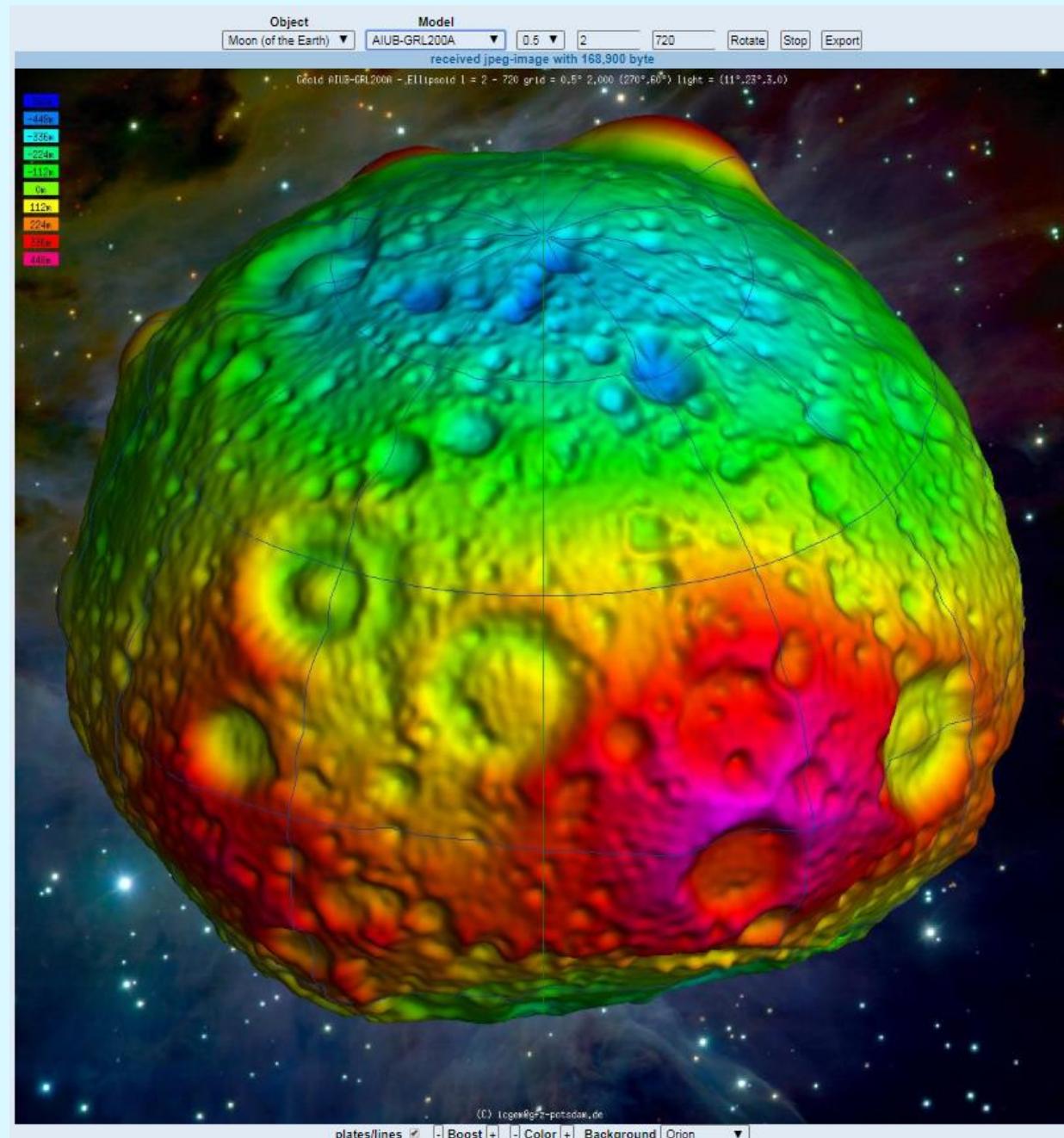
ICGEM, GFZ Potsdam, Tue May 28 16:33:14 2019

Superficie topografica da griglia.



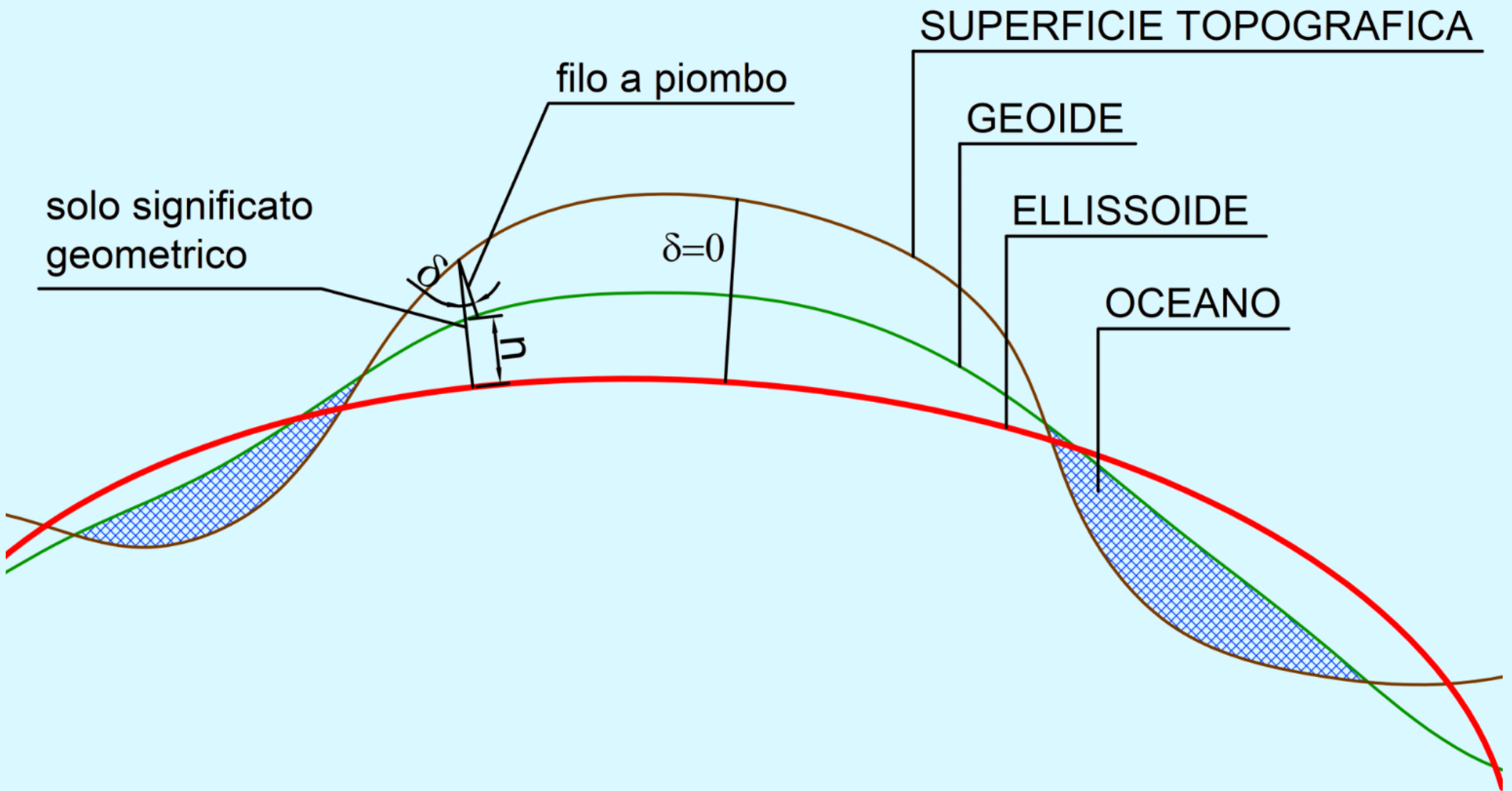
ETOPO1 in Google Earth.

La Terra non basta? Ecco la Luna!



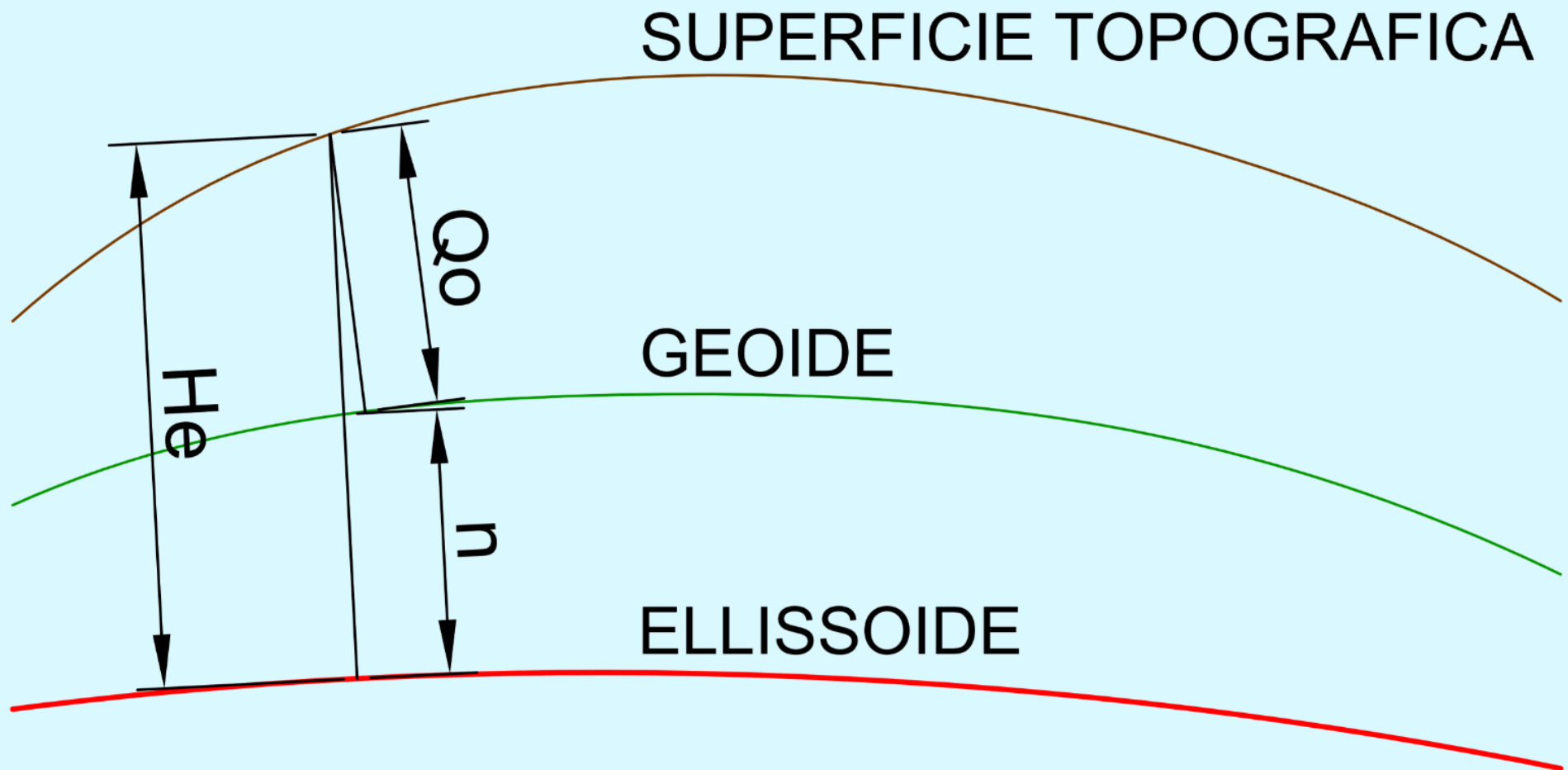
MODELLI LOCALI

- Non sono descritti in una forma analitica chiusa, ma da modelli discreti dedotti da accurate misurazioni: i GRIGLIATI.
- I grigliati forniscono gli scostamenti dall'ellissoide di riferimento:
 - Scostamenti lineari.
 - Scostamenti angolari.



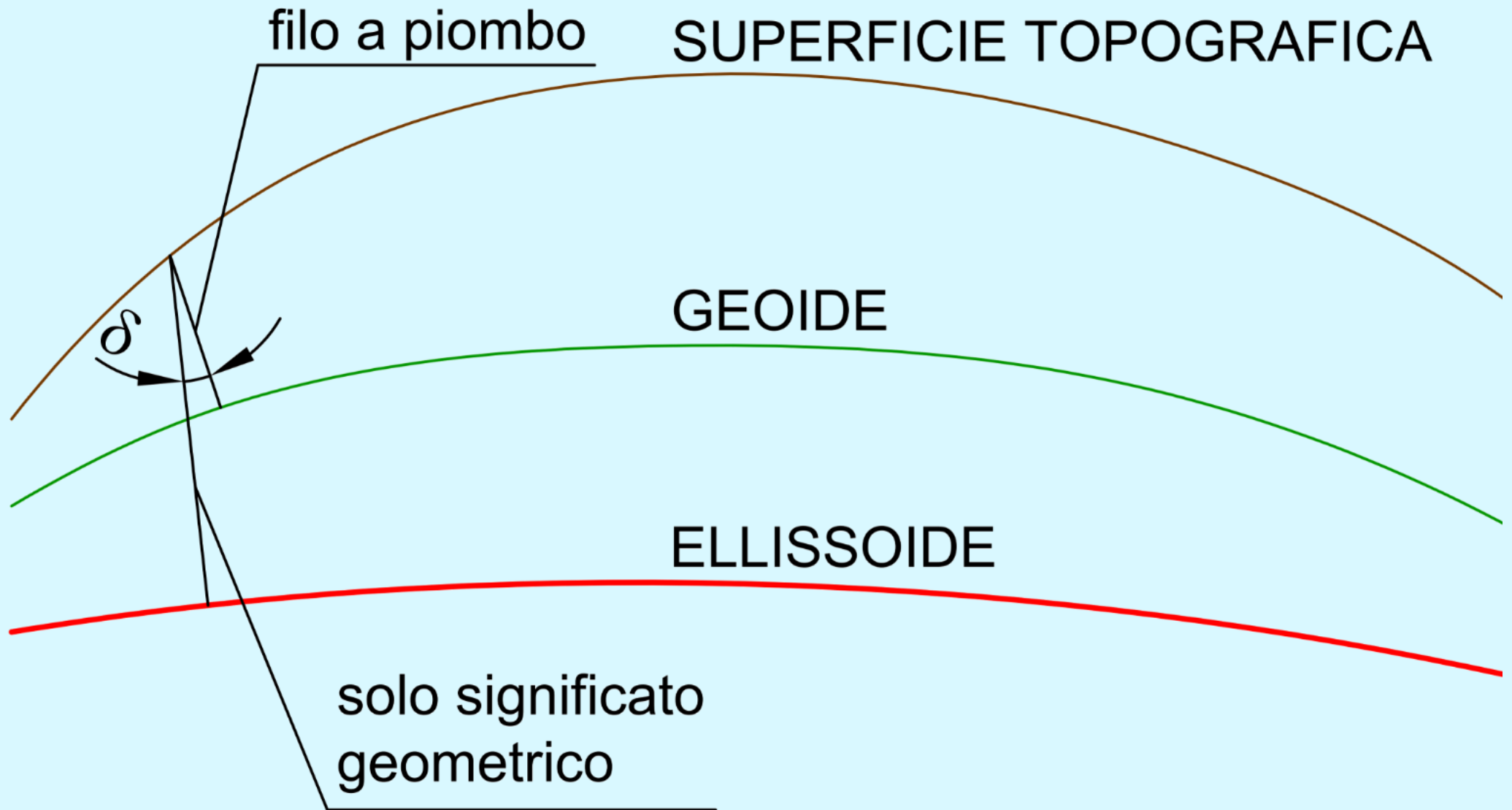
SCOSTAMENTI LINEARI

ONDULAZIONE = Altezza ellissoidica - Quota ortometrica



SCOSTAMENTI ANGOLARI

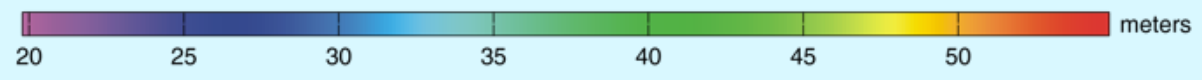
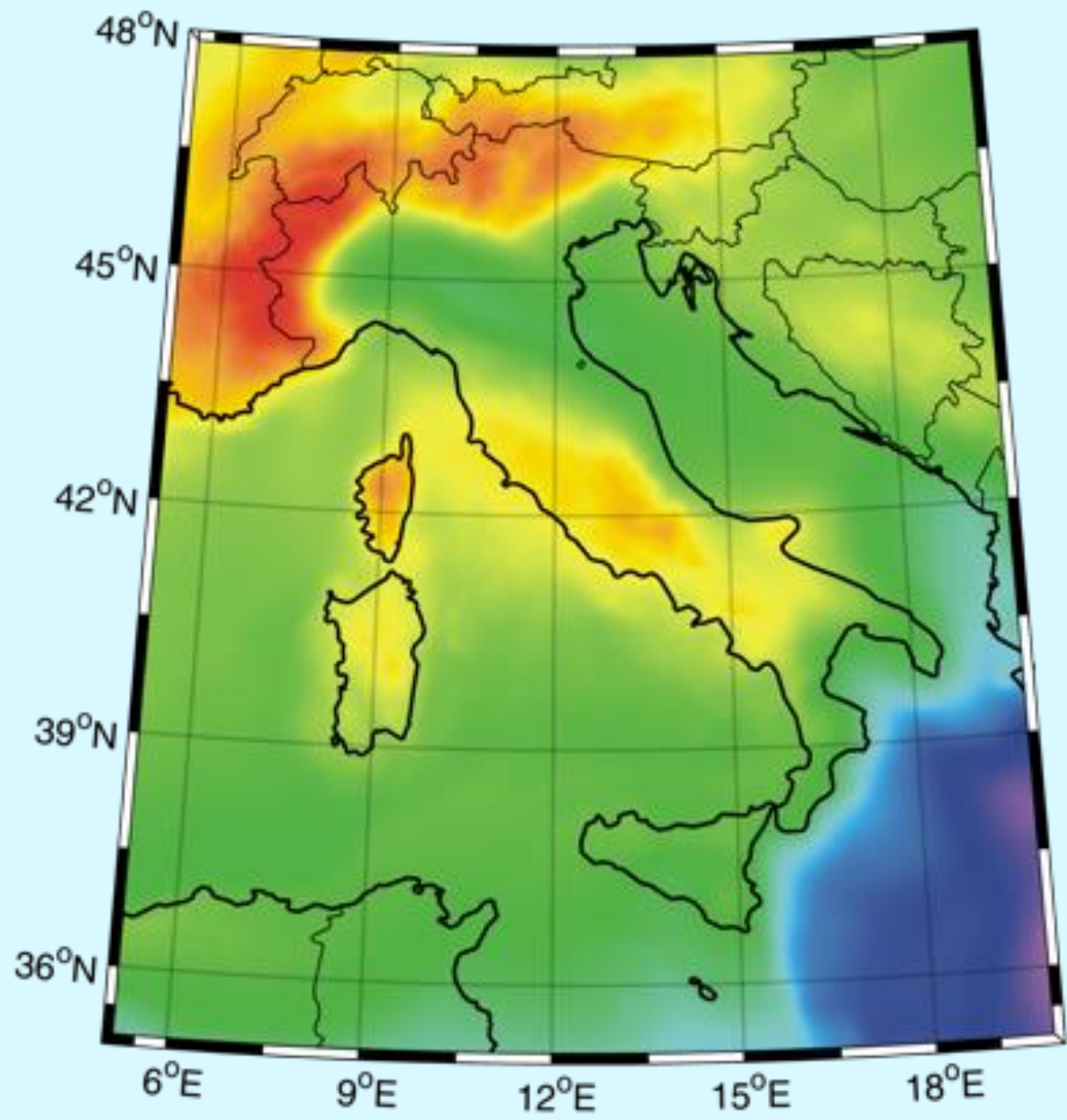
Angolo compreso tra la normale all'ellissoide e la verticale



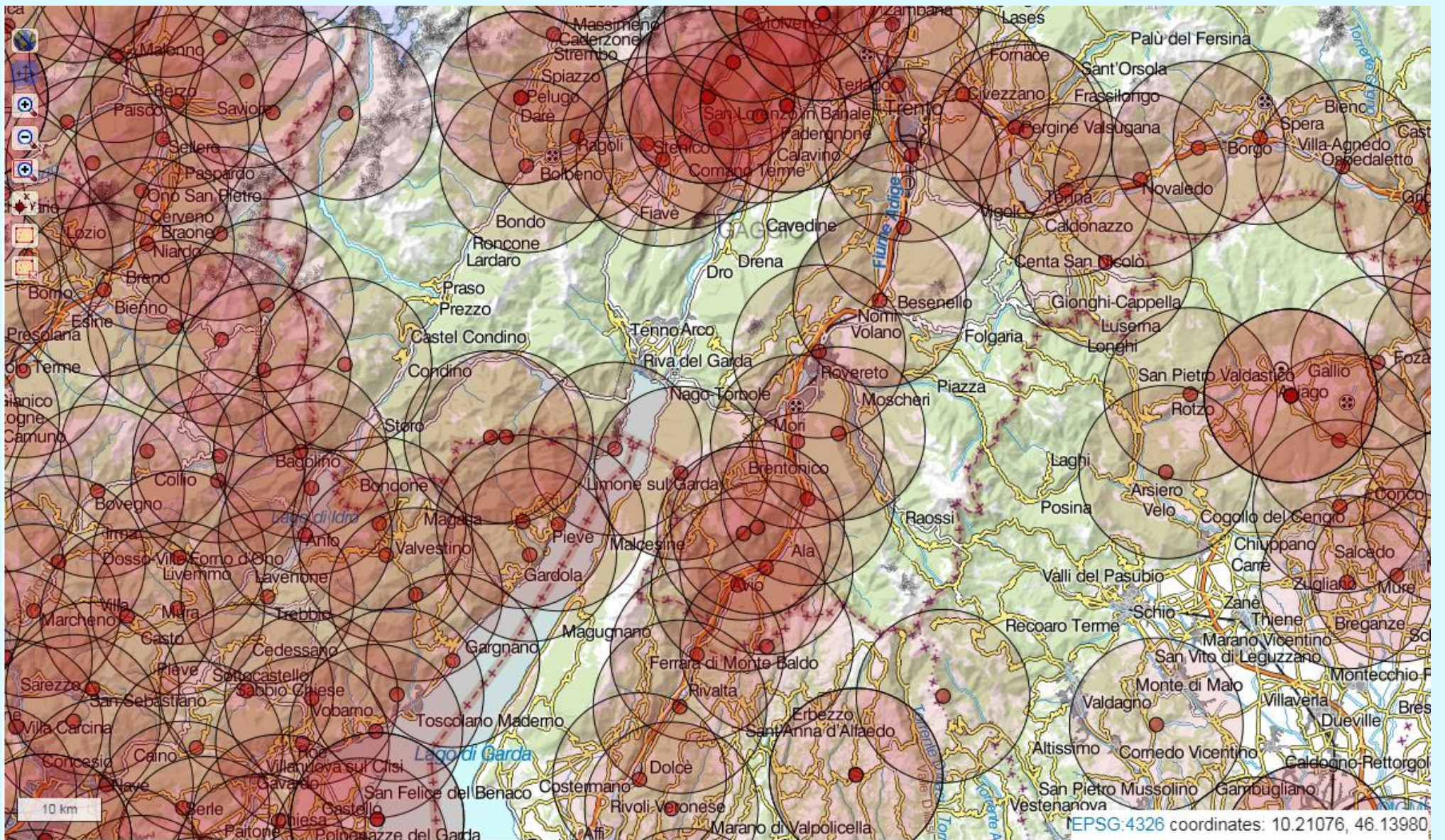
ITALGEO2005

Modello di geoide locale valido per l'Italia

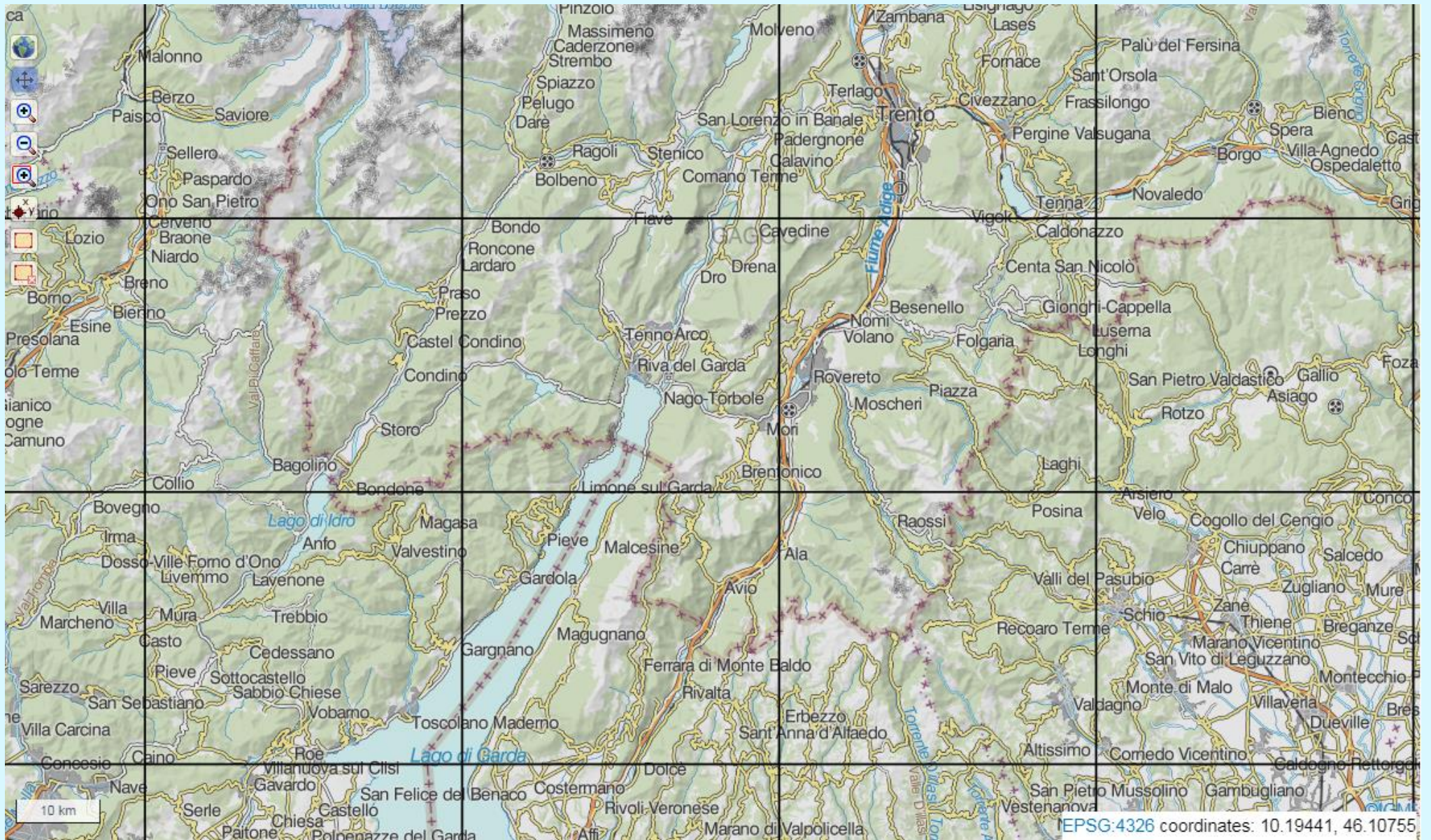
- Misure gravimetriche (utilizzando gravimetri).
- Misure GPS-LEV (quota ellissoidica GNSS meno quota ortometrica da livellazione di precisione).
- Misure astronomiche per il calcolo della deviazione dalla verticale (direzione del filo a piombo).



Per l'Italia, i valori degli scostamenti sono forniti dall'IGM attraverso dei grigliati i quali permettono di trasformare le coordinate da geografiche (latitudine, longitudine) a cartografiche (Est, Nord), nonché il passaggio dall'altezza ellissoidica alla quota ortometrica: datum orizzontale e verticale.



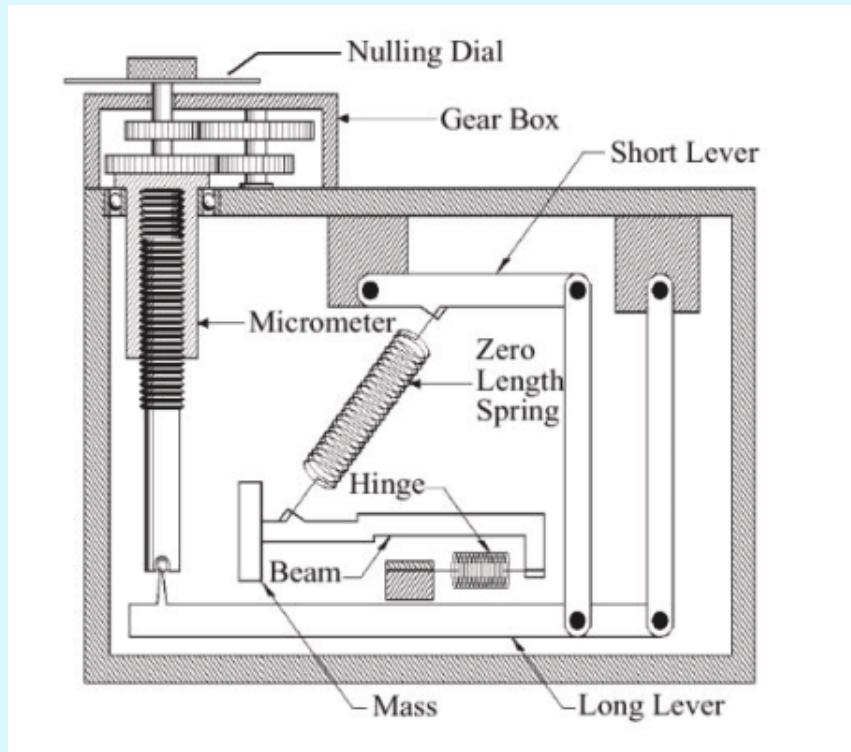
Intorno di 10 Km da un punto IGM95 (circa 300 Km²)



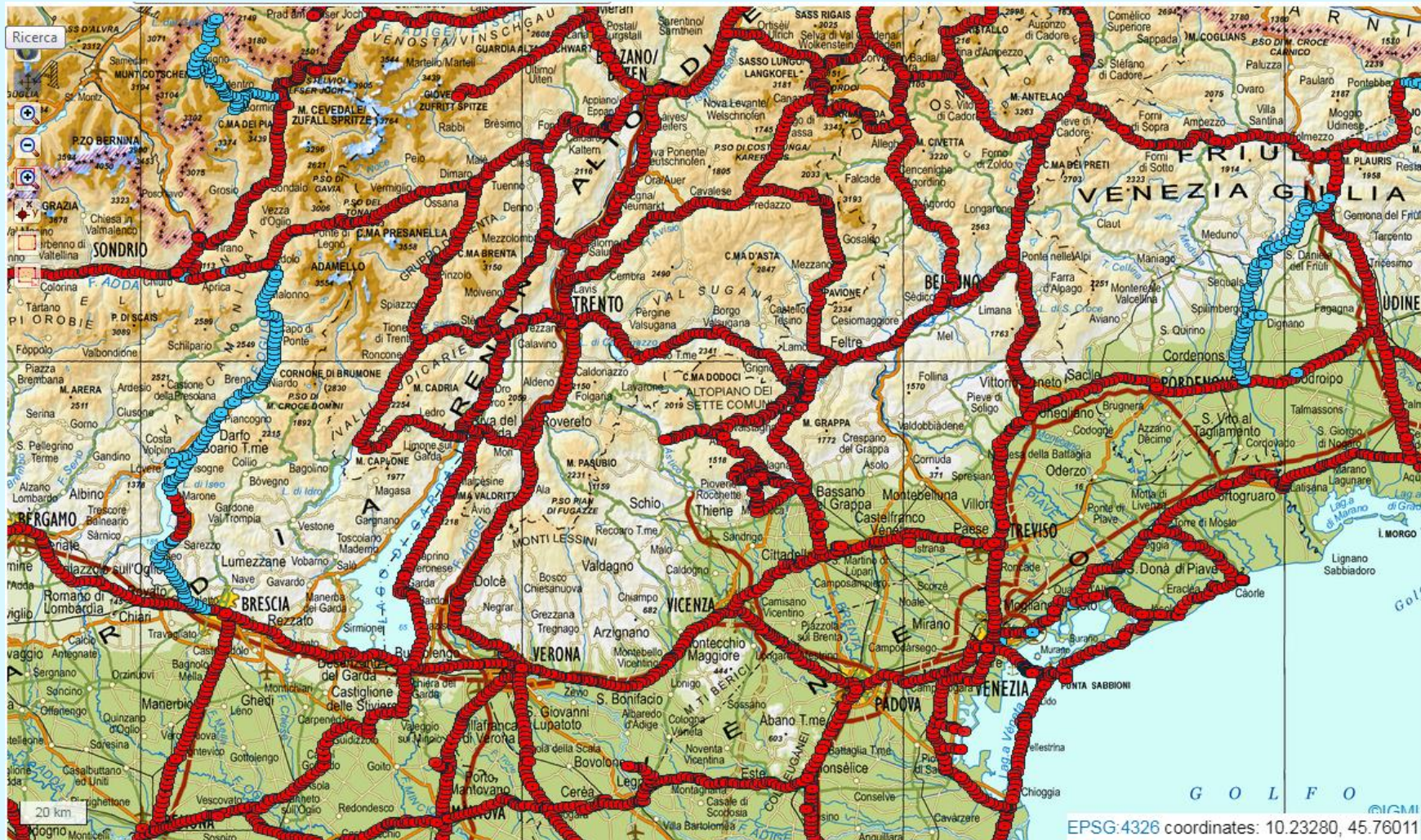
Fogli carta IGM 1:50.000 (circa 600 Km²)

NOTE SUI GRAVIMETRI E SULLA LIVELLAZIONE DI PRECISIONE

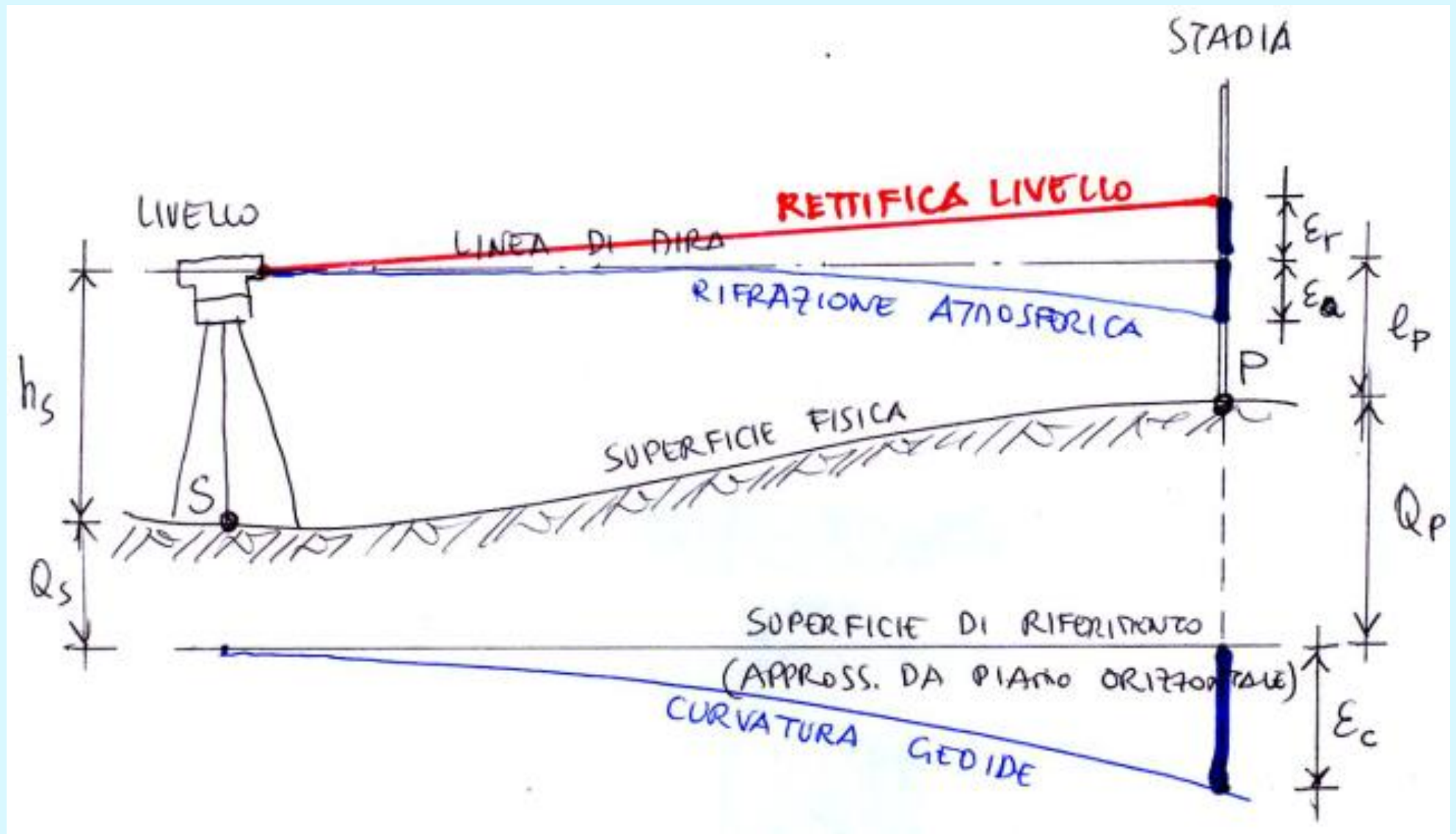
GRAVIMETRI



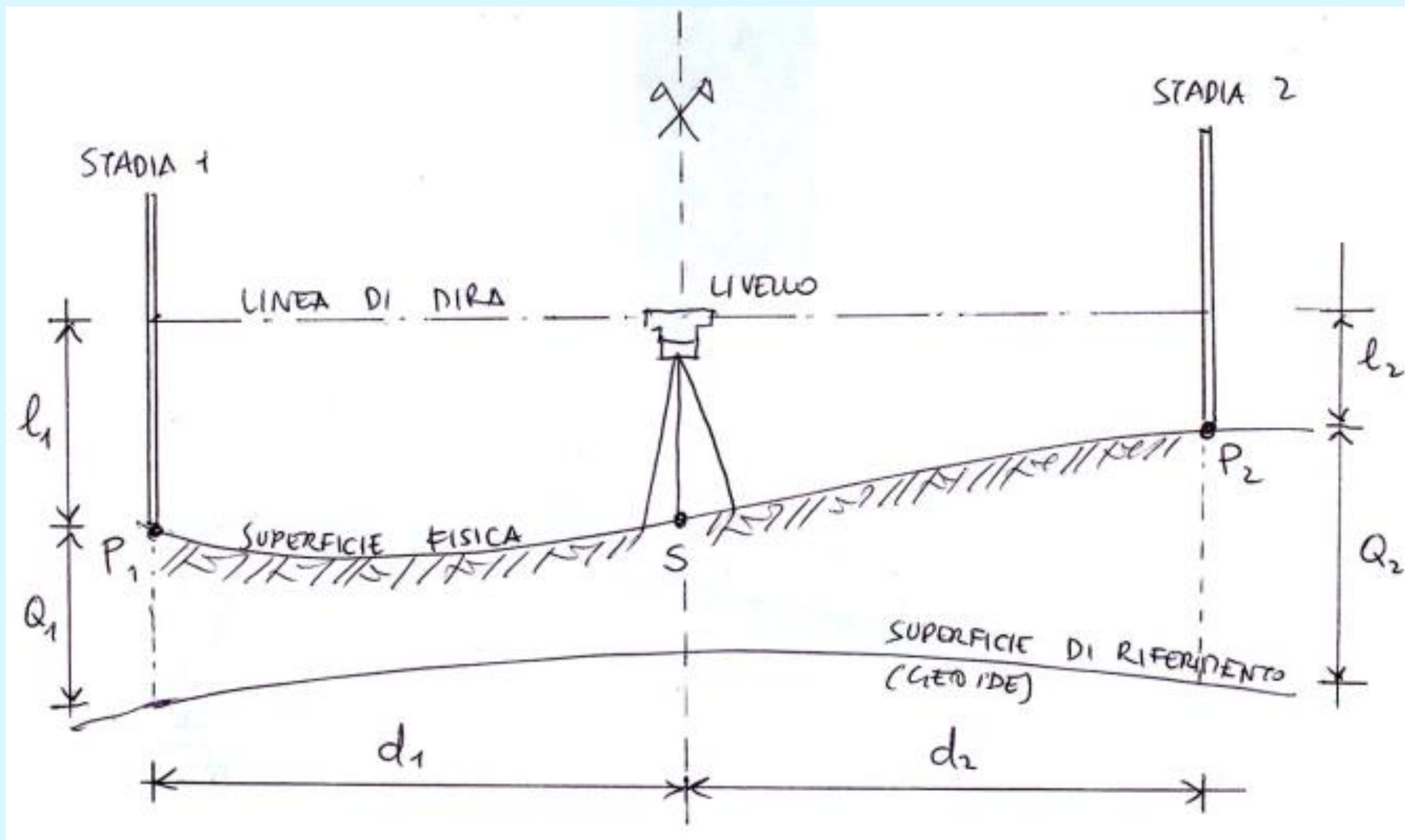
LIVELLAZIONE DI ALTA PRECISIONE



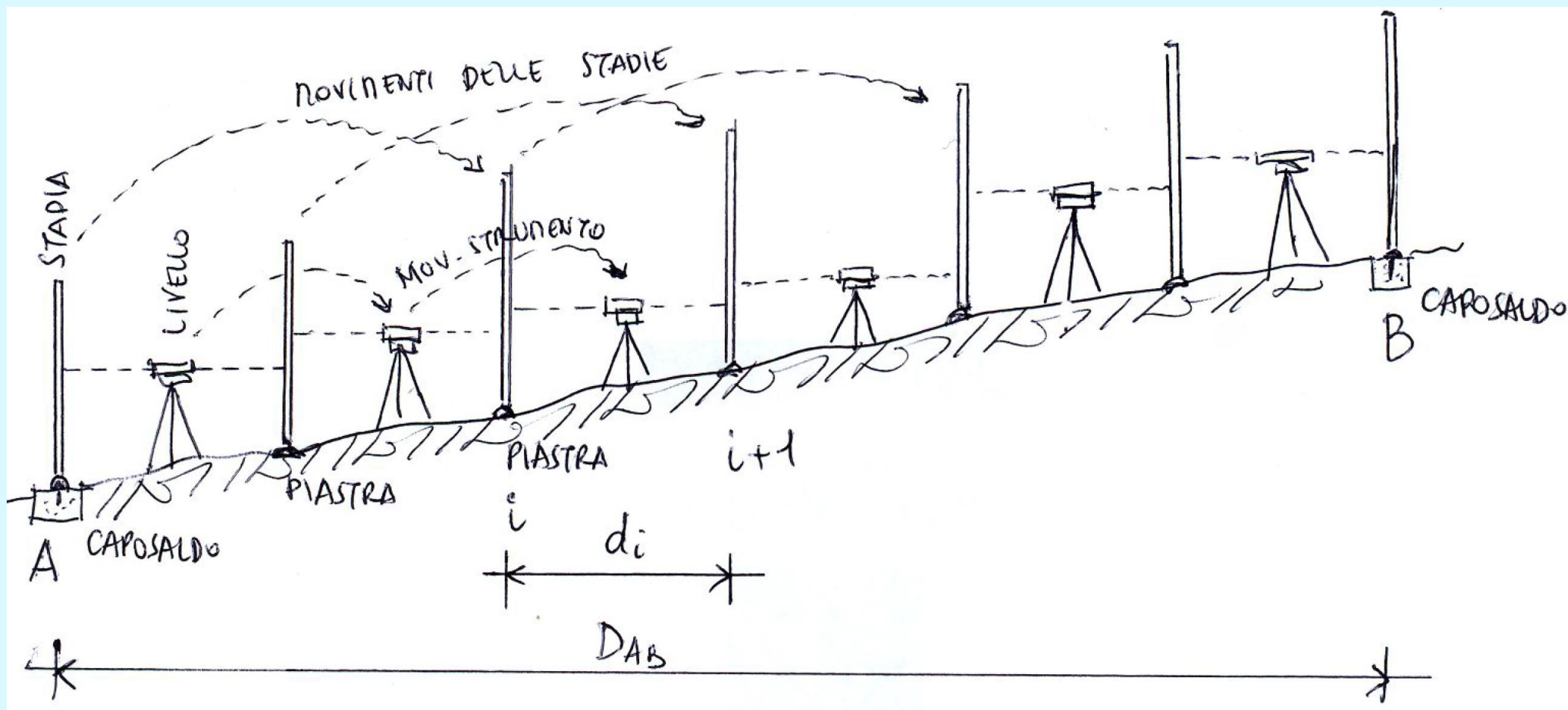
Schemi Laboratorio di Topografia dell'Università di Perugia



Livellazione geometrica da un estremo.



Livellazione geometrica dal mezzo.

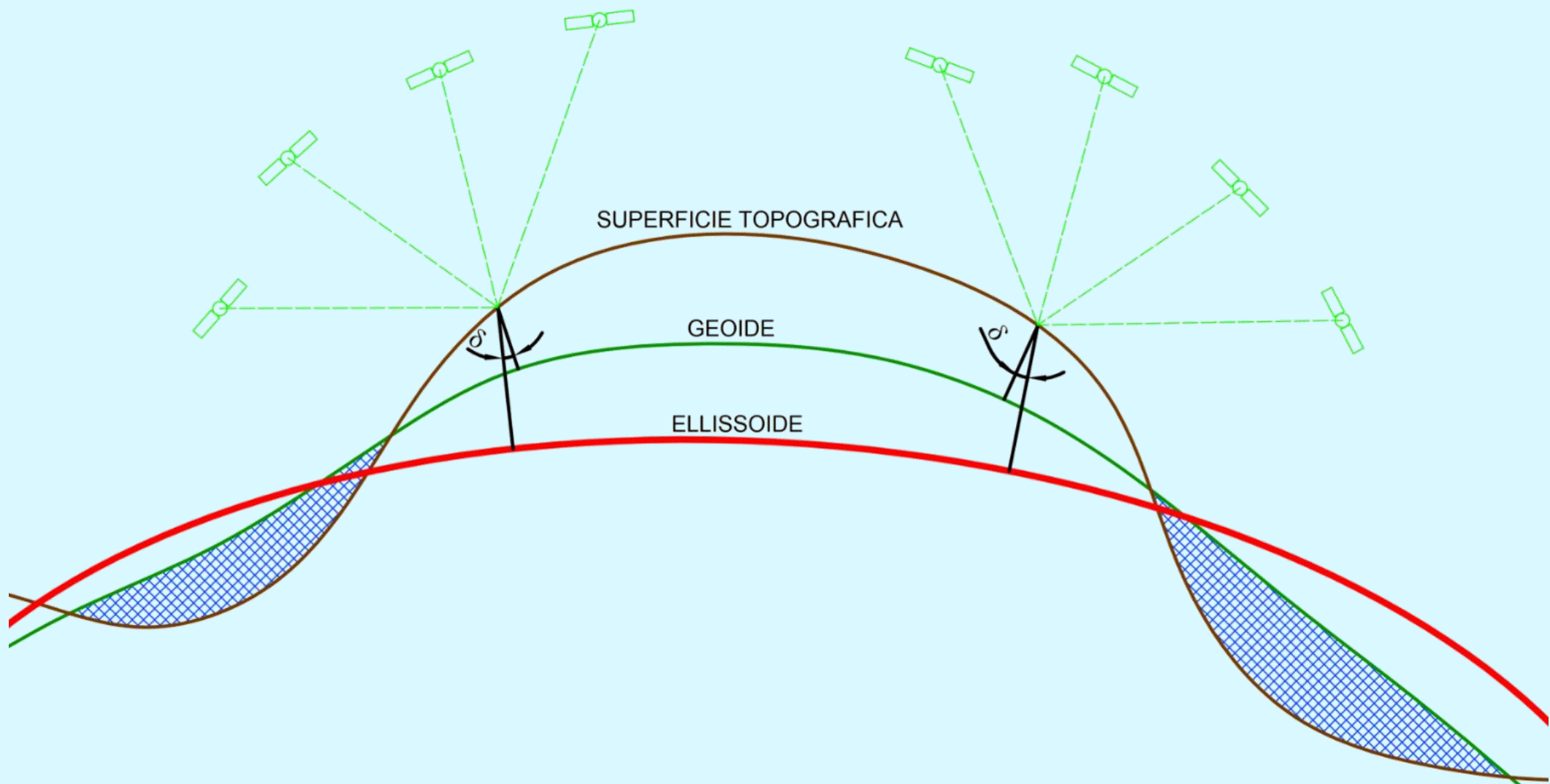


Battuta di livellazione.

ELLISSOIDI GLOBALI E LOCALI

ELLISSOIDI GLOBALI

Le misure a grande distanza vengono prese con strumentazioni satellitari. Lo scostamento angolare è ininfluenza. Un ellissoide globale è, ad esempio, il WGS84 valido per tutta la Terra (datum globale).



SUPERFICIE TOPOGRAFICA

GEOIDE

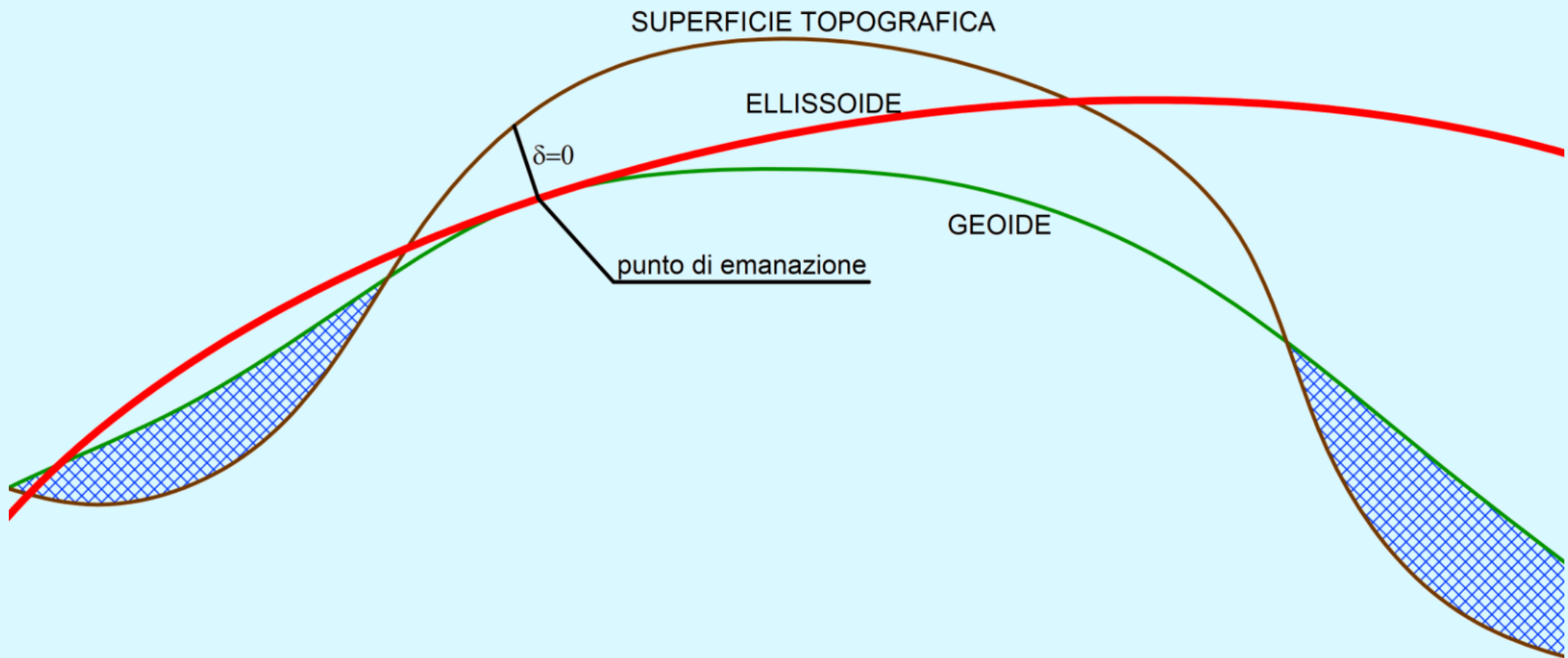
ELLISSOIDE

σ

σ

ELLISSOIDI LOCALI

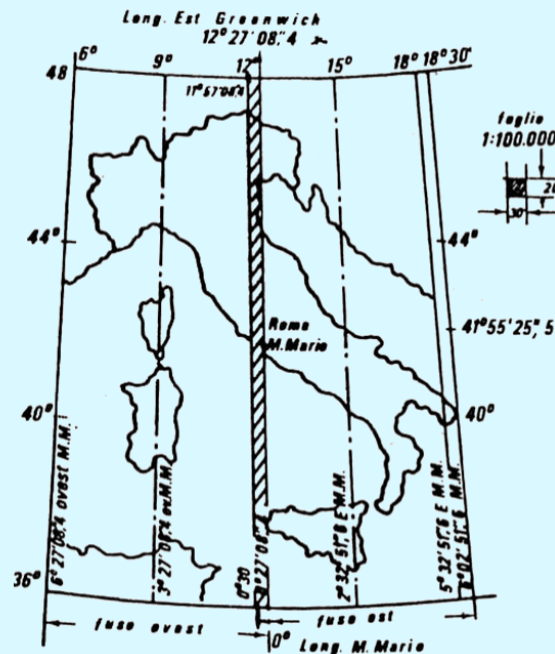
- Viene adottato un ellissoide locale di riferimento orientato in modo da annullare la deviazione angolare in un punto detto di EMANAZIONE.
- L'ellissoide è tangente al geoide nel punto di emanazione.
- Si ottiene un DATUM LOCALE.



Dovendo determinare le coordinate astronomiche del punto di emanazione, quest'ultimo viene spesso scelto nei pressi di un

osservatorio astronomico. Per l'Italia, le misurazioni sono state effettuate nel 1940 dall'osservatorio Monte Mario a Roma.

Da qui il datum locale Roma40 e la relativa proiezione Gauss-Boaga.



Gauss-Boaga

CARTOGRAFIA
UFFICIALE ITALIANA

OFFSET:
OVEST 1.500.000
EST 2.520.000

FUSI: 32 33

DATUM: Roma 40

BIBLIOGRAFIA

- International Centre for Global Earth Models (ICGEM):
<http://icgem.gfz-potsdam.de/home>
 - Franz Barthelmes. *Definition of Functionals of the Geopotential and their calculation from spherical harmonic models - Theory and formulas used by the calculation service of the International Centre for Global Earth Models (ICGEM) - Scientific technical report STR09/02, Revised edition, January 2013*
- National Centers for Environmental Information - ETOPO1 Arc-Minute Global Relief Model: <https://data.nodc.noaa.gov/cgi-bin/iso?id=gov.noaa.ngdc.mgg.dem:316>
- Istituto Geografico Militare: <https://www.igmi.org/>
- Antonio Meloni. *Il campo di gravità (per gli studenti di “Introduzione di Fisica della Terra Solida”, di Roma Tre, AA 05/06)*
- Sezione DIDATTICA del laboratorio di topografia dell’Università di Perugia:
<http://labtopo.ing.unipg.it/>
 - Misura dei dislivelli
 - Il campo gravitazionale terrestre e il Geoide